Enviado por : Manuel Hermán Capitán
2006-04-01 14:17:00

# Historia de las Matemáticas: El número Pi

Continuando con la serie Historia de las Matemáticas en esta entrega conoceremos el camino que llevó a los matemáticos hasta Pi, además de algunas curiosidades sobre este místico número.

Un versículo poco conocido de la Biblia dice:

*Hizo una fuente de metal fundido que medía 10 codos de diámetro: era completamente redonda, y su altura era de 5 codos y una línea de 30 codos lo rodeaba. (I Reyes 7, 23)*

El mismo versículo puede encontrarse en II Crónicas 4, 2. Aquí aparece en una lista de especificaciones para el gran templo de Salomón, construido sobre el 950 A.C. y su interés aquí radica en que da un valor de $\pi = 3$. No es un valor muy preciso, desde luego, e incluso no muy preciso para su época, lo egipcios y mesopotámicos habían dado valores de 25 / 8 = 3,125 y de $\sqrt{10}$ = 3,162 respectivamente en épocas mucho más recientes: aunque en defensa de los artesanos de Salomón debería hacerse notar que el elemento que se describe parece ser una pieza de metal fundida muy grande, donde un alto grado de precisión geométrica no es posible ni necesario. Hay algunas otras interpretaciones que llevan a un valor mucho más correcto.

El hecho de que la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo es constante ha sido conocido durante tanto tiempo que es casi imposible de rastrear. Los primeros valores para $\pi$ que incluyen el valor “bíblico” de 3, fueron casi con certeza encontrados mediante medida. En el Papiro Egipcio de Rhind, que data del 1650 A.C, hay buenas pruebas para tomar 4 (8 / 9)2 = 3,16 como valor para $\pi$.

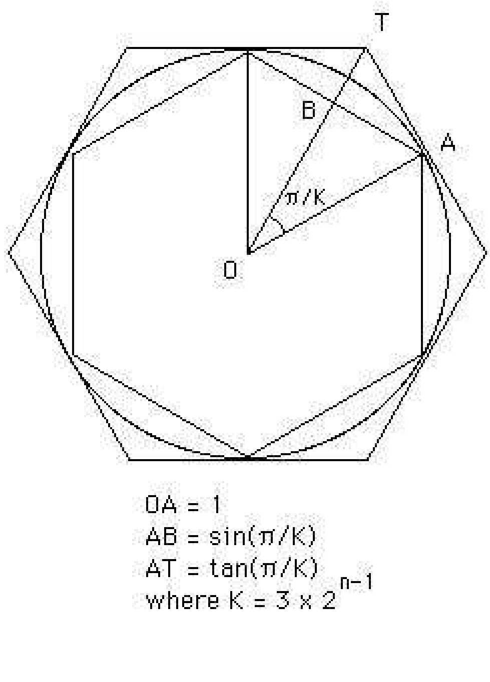
El primer cálculo teórico parece haber sido llevado a cabo por Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.). Obtuvo la aproximación: $223 / 71 < \pi < 22 / 7$.

Antes de dar una indicación para su demostración, nota que existe un alto nivel de sofisticación en el uso de desigualdades. Arquímedes sabía, cosa que hoy desconoce mucha gente, que $\pi$ no es igual a 22 / 7, y no hizo ninguna afirmación de haber descubierto el valor exacto. Si tomamos su mejor aproximación como la media de estos dos límites obtenemos 3,1418, un error de aproximadamente 0,0002.

Aquí está el argumento de Arquímedes.

Considera un círculo de radio 1, en el cual inscribimos un polígono regular de $3 \times 2^{n-1}$ lados, con un semiperímetro $b_n$, y superponemos un polígono regular de $3 \times 2^{n-1}$ lados, con un semiperímetro de $a_n$.

El diagrama para el caso n = 2 está a la derecha.




El efecto de este procedimiento es definir una secuencia incremental: $b_1, b_2, b_3, \ldots$ y una secuencia decreciente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tales que ambas secuencias tienen como límite $\pi$.

Usando notación trigonométrica, vemos que los dos semiperímetros vienen dados por $a_n = K \tan(\pi / K)$, $b_n = K \sin(\pi / K)$, donde K = 3 2n-1. Igualmente tenemos que $a_{n+1} = 2K \tan(\pi / 2K)$, $b_{n+1} = 2K \sin(\pi / 2K)$, y no es un complejo ejercicio de trigonometría demostrar que:

$1 / a_n + 1 / b_n) = 2 / a_{n+1} \ldots$ (1)
$a_{n+1} b_n = (b_{n+1})^2 \ldots$ (2)

Arquímedes, comenzando desde $a_1 = 3 \tan(\pi / 3) = 3\sqrt{3}$ and $b_1 = 3 \sin(\pi / 3) = 3\sqrt{3}/2$, calculó $a_2$ usando (1), luego $b_2$ usando (2), $a_3$ usando (1), $b_3$ usando (2), y de esta forma hasta que calculó $a_6$ and $b_6$. Su conclusión fue que $b_6 < \pi < _a$ .

Es importante darse cuenta de que el uso de la trigonometría aquí no es histórico: Arquímedes no tenía las ventajas de una notación algebraica y trigonométrica y tuvo que derivar (1) y (2) de forma puramente geométrica. Además no tuvo siquiera la ventaja de nuestra notación decimal para los números, por lo que el cálculo de $a_6$ and $b_6$ a partir de (1) y (2) no fue de ninguna forma una tarea trivial. Por tanto fue una fabulosa proeza de imaginación y cálculo y la maravilla no es que parase en polígonos de 96 lados, sino que fue más lejos.

Por supuesto, no hay razón en principio por la que no se debería continuar. Distinas personas lo hicieron, incluyendo a:

| Nombre | Año | Precisión |
|---|---|---|
| Ptolomeo | 150 A.C | 3,1416 |
| Zu Chongzhi | 430-501 A.C | 355 / 113 |
| al-Khwarizmi | 800 | 3,1416 |
| al-Kashi | 1430 | 14 dígitos |
| Viète | 1540-1603 | 9 posiciones |
| Roomen | 1561-1615 | 17 posiciones |
| Van Ceulen | 1600 | 17 posiciones |

Excepto para Zu Chongzhi, sobre quién no sabemos prácticamente nada y que es muy improbable que conociese el trabajo de Arquímedes, no se produjo ningún avance teórico en estas mejoras, solo mayor energía en el cálculo. Nota como la cabecera, es todos estas materias científicas, pasaron de Europa al Este desde el milenio que va del 400 al 1400 D.C.

Al-Khwarizmi vivió en Bagdad, y dio su nombre a "algoritmo", mientras que las palabras*al jabr* en el título de uno de sus libros nos dio la palabra "álgebra". Al-Kashi vivió incluso más al Este, en Samarkanda, mientras que Zu Chongzhi, no es necesario añadir, vivió en China.

El Renacimiento europeo ocasionó en su debido momento todo un nuevo mundo matemático. Entre los primeros efectos de este redespertar fue la aparición de fórmulas matemáticas para π. Una de las primeras fue la de Wallis (1616-1703): $2 / \pi = (1.3.3.5.5.7. \ldots) / (2.2.4.4.6.6. \ldots)$ y una de las más conocidas es: $\pi / 4 = 1 - 1 / 3 + 1 / 5 - 1 / 7 + \ldots.$

Esta fórmula se le atribuye en muchos casos a Leibniz (1646-1716) pero parece que fue descubierta en primer lugar por James Gregory (1638- 1675).

Estas son dos espectaculares y asombrosas fórmulas, ya que las expresiones de la derecha son de carácter completamente aritmético, mientras π emerge en primera instancia de la geometría. Demostraron los sorprendentes resultados que los procesos infinitos pueden lograr y muestran el camino a la maravillosa riqueza de la matemática moderna.

Desde el punto de vista del cálculo de π, sin embargo, no tenía ningún uso. En las series de Gregory, por ejemplo, para obtener un resultado con 4 posiciones decimales correctas se requiere que el error sea menor que 0,00005 =1 / 20 000, y para esto necesitamos unos 10 000 términos de la serie. Sin embargo, Gregory también demostró el resultado más general

$\tan^{-1} x = x - x^3 / 3 + x^5 / 5 - \ldots (-1 \leq x \leq 1) \ldots (3)$

a partir del cual obtenemos la primera serie si tomamos x = 1. Por lo que usando el hecho de que $\tan^{-1}( 1 / \sqrt{3} ) = \pi / 6$ tenemos que

$\pi / 6 = ( 1 / \sqrt{3} )( 1 - 1 / (3.3) + 1 / (5.3.3) - 1 / (7.3.3.3) + \ldots$

la cual converge mucho más rápidamente. El décimo término es $1 / (19 \times 3^9\sqrt{3})$, lo cual es menos que 0,00005, y por tanto al menos 4 decimales correctos tras solo 9 términos.

Una idea incluso mejor es tomar la fórmula:

$\pi / 4 = \tan^{-1}( 1 / 2 ) + \tan^{-1}( 1 / 3 ) \ldots (4)$

Y entonces resultan las dos series obtenidas poniendo primero 1 / 2 y 1 / 3 dentro (3).

Claramente tendremos una convergencia muy rápida, en efecto, si podemos encontrar una fórmula similar a esta:

$\pi / 4 = \tan^{-1}( 1 / a ) + \tan^{-1}( 1 / b )$

Con a y b graneds. En 1706 Machin encontró tal fórmula:

$\pi / 4 = 4 \tan^{-1}( 1 / 5 ) - \tan^{-1}( 1 / 239 ) \ldots (5)$

En realidad esto no es difícil de probar, si sabes cómo demostrar (4) entonces no hay ninguna dificultad extra en (5), excepto que la aritmética es más compleja. Imaginar esto en primer lugar, por supuesto, es un tema bastante distinto.

Con una fórmula como esta disponible, la única dificultad en calcular π es superar el aburrimiento del cálculo continuo. Ni que decir tiene que algunas personas fueron lo bastante estúpidas como para dedicar ingentes cantidades de tiempo y esfuerzo en este tedioso y completamente inútil pasatiempo. Uno de ellos, un inglés llamado Shanks, usó la fórmula de Machin para calcular 707 lugares de π, publicando los resultados de muchos años de trabajo en 1873. Shanks ha conseguido la inmortalidad por una razón muy curiosa que explicaremos en un momento.

Aquí tenemos un resumen de cómo se produjeron las mejoras:

- 1699: Sharp usó el cálculo de Gregory para obtener 71 dígitos correctos
- 1701: Machin usó una mejora para obtener 100 dígitos. Los siguientes usaron sus métodos
- 1719: de Lagny encontró 112 dígitos correctos
- 1789: Vega obtuvo 126 lugares y en 1794 obtuvo 136
- 1841: Rutherford calculó 152 dígitos y en 1853 obtuvo 440
- 1873: Shanks calculó 707 posiciones de las cuales 527 eran correctas

Está disponible una **cronología** más detallada.

Shanks sabía que π era irracional dado que había sido demostrado en 1761 por Lambert. Poco después del cálculo de Shanks se demostró por parte de Lindemann que π es transcendental, esto es, π no es la solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. De hecho este resultado de Lindemann demostró que la "cuadratura del círculo" era imposible. La trascendencia de π implica que no hay regla ni compás que permitan construir un cuadrado con un área igual a un círculo dado.

Justo tras los resultados de Shanks De Morgan informó de una rareza estadística curiosa, que encontró que en los últimos 707 dígitos había una sospechosa carencia de sietes. Menciona esto en su *Budget of Paradoxes* de 1872 y la curiosidad permaneció hasta que en 1945 Ferguson descubrió que Shanks había cometido un error en la posición 528, tras la cual todos sus dígitos eran incorrectos. En 1949 se usó un ordenador para calcular 2000 posiciones de π. En esta y todas las siguientes expansiones por ordenador el número de sietes no difiere significativamente de lo esperado, y efectivamente la secuencia de dígitos ha pasado hasta ahora todos los test estadísticos de aleatoriedad.

Deberíamos comentar algo sobre cómo surgió la notación de π. Oughtred en 1647 usó el símbolo d / π para la razón del diámetro de un círculo a su circunferencia. David Gregory (1697) usó π / r para la razón de la circunferencia de un círculo a su radio. El primer uso de π con su significado actual se debe al matemático galés William Jones en 1706 cuando afirmó "3,14159 andc. = π". Euler adoptó el símbolo en 1737 y rápidamente se convirtió en una notación estándar.

Concluimos con una curiosidad estadísticas más sobre el cálculo de π, llamado el experimento de la aguja de Buffon. Si tenemos una rejilla uniforme de líneas paralelas, con una separación de distancia unitaria y lanzamos una aguja de longitud $k < 1$ en la rejilla, la probabilidad de que la aguja crece una línea es de $2k / \pi$. Distintas personas han intentado calcular π arrojando agujas. El resultado más notable fue el de Lazzerini (1901), quien hizo 34 080 lanzamiento y obtuvo:

$\pi = 355 / 113 = 3.1415929$

lo cual, es de hecho, el valor encontrado por Zu Chongzhi. Este resultado es sospechosamente bueno, y el truco lo revela el extraño número de 34 080 lanzamientos. Kendall y Moran comentan que un buen valor puede obtenerse deteniendo el experimento en un momento óptimo. Si estableces de antemano el número de lanzamientos que deben hacerse entonces tienes una forma muy imprecisa de calcular π. Kendall y Moran comentan que sería mejor cortar un gran círculo de madera y unas una cinta de medida para encontrar su circunferencia y diámetro.

Siguiendo con el tema de los experimentos falsos Gridgeman, en un artículo que desdeñaba a Lazzerini y otros, provocó bastantes risas usando una aguja de una longitud cuidadosamente escogida de $k = 0{,}7857$, arrojándola dos veces, y consiguiendo que cruzara la línea en una de ellas. Así pues su estimación de π estaba dada por:

$2 \times 0{,}7857 / \pi = 1 / 2$

a partir de lo cual tenemos el encomiable valor de $\pi = 3{,}1428$. ¡No lo hizo en serio!

Es casi increíble que una definición de π fuese usada, al menos como excusa, para un ataque racial sobre el eminente matemático Edmund Landau en 1934. Landau había definido π en su libro de texto publicado en Göttingen en aquel año usando el, ahora bastante usual, método de decir que $\pi / 2$ es el valor de x entre 1 y 2 para el cual el coseno de x es cero. Esto desató una disputa académica que terminó con la destitución de Landau de su puesto en Göttingen. Bieberbach, un eminente teórico numérico que hacía el ridículo con sus visiones racistas, explicó las razones para la destitución de Landau:-

*De esta forma el valiente rechazo por el cuerpo de estudiantes de Göttingen que un gran matemático, Edmund Landau, ha experimentado es debido en un análisis final al hecho de que el estilo no-germano de este hombre en sus enseñanzas e investigaciones es insostenible con los sentimientos germanos. Una gente que ha observado como miembros de otras razas están trabajando para imponer ideas extranjeras a sí mismos debe rechazar profesores de una cultura ajena.*

G H Hardy replicó inmediatamente a Bieberbach en una nota publicada acerca de los consecuencias de esta definición no-germana de π:

*Hay muchos de nosotros, ingleses y alemanes, que dijimos durante la Guerra cosas [**N del T:** Se sobreentiende la Primera Guerra Mundial] sin sentido y que ahora lamentamos recordar. La ansiedad por la propia posición, el miedo a caer tras el creciente torrente de estupideces, la determinación a todo coste de no quedar al descubierto, pueden ser naturales, si no particularmente heroicas, excusas. La reputación del Profesor Bieberbach excluye tales explicaciones a sus palabras, lo que me lleva a la poco caritativa conclusión de que realmente cree que tiene razón.*

No solo los alemanes tuvieron en la actualidad problemas con π. En los Estados Unidos el valor de π dio lugar a un acalorado debate político. En el Estado de de Indiana en 1897 la Cámara de Representantes aprobó por unanimidad una *Proyecto de Ley introduciendo una nueva verdad matemática.*

*Promulgado por la Asamblea del Estado de Indiana: Se ha encontrado que el área de un círculo es el cuadrado de una línea igual al cuadrante de la circunferencia, así comoel área de un rectángulo equilátero es el cuadrado de uno de los lados. (Sección I, House Bill No. 246, 1897)*

El Senado de Indiana se mostró un poco más sensato y ¡pospuso de forma indefinida la adopción del decreto!

***Cuestiones abiertas sobre el número π***

- ¿Cada uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aparecen infinitamente con frecuencia en π?
- Cuestión de Brouwer: En la expansión decimal de π, ¿hay alguna posición donde mil dígitos consecutivos sean todos cero?

- ¿En π simplemente normal en base 10? ¿Hace esto que cada dígito aparezca con la misma frecuencia en su expansión decimal en un sentido asintótico?
- ¿Es π normal en base 10? ¿Hace esto que cada bloque de dígitos de una longitud dada aparezca con la misma freciencia en su expansión decimal en un sentido asintótico?
- ¿Es π normal? ¿Hace esto que cada bloque de dígitos de una longitud dada aparezca con la misma frecuencia en la expansión de cada base en un sentido asintótico? El concepto fue introducido por Borel en 1909.
- ¡Otra cuestión normal! Sabemos que π no es un número racional ya que no hay ningún punto a partir del cual sus dígitos comiencen a repetirse. Sin embargo, si π es normal entonces el primer millón de dígitos 314159265358979... tendrá lugar desde algún punto. ¡Incluso si π no es normal esto se matiene! ¿Es así? ¿Si es así, desde qué punto? Nota: Por encima de 200 millones lo más largo en aparecer es 31415926 y aparece dos veces.

Como posdata, aquí tienes una regla mnemotécnica para la expansión decimal de π. Cada dígito es el número de letras de la palabra correspondiente.
*How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard...:*
3.14159265358979323846264...

Traducción de la regla:

[Cómo deseo beber, alcohol por supuesto, tras las pesadas lecturas sobre la mecánica cuántica. Toda su geometría, Señor Planck, es bastante dura...]

***Autores:*** *J J O'Connor and E F Robertson*

**MacTutor History of Mathematics**

**Artículos Relacionados:**

**Historia de las Matemáticas: El Cero**

**Historia de las Matemáticas: El Infinito**

**Bibliografía:**

*1. A Ahmad, On the π of Aryabhata I, Ganita Bharati 3 (3-4) (1981), 83-85.*
*2. L Badger, Lazzarini's lucky approximation of π, Math. Mag. 67 (2) (1994), 83-91.*
*3. P Beckmann, A history of π (Boulder, Colo., 1971).*
*4. E M Bruins, With roots towards Aryabhata's π-value, Ganita Bharati 5 (1-4) (1983), 1-7.*
*5. G L Cohen and A G Shannon, John Ward's method for the calculation of pi, Historia Mathematica 8 (2) (1981), 133-144.*
*6. P Freguglia, The determination of π in Fibonacci's 'Practica geometriae' in a fifteenth-century manuscript (Italian), Contributions to the history of mathematics (Italian) (Modena, 1990), 75-84.*
*7. N T Gridgeman, Geometric probability and the number π, Scripta Math. 25 (1960), 183-195.*
*8. R C Gupta, The value of π in the 'Mahabharata', Ganita Bharati 12 (1-2) (1990), 45-47.*
*9. R C Gupta, On the values of π from the Bible, Ganita Bharati 10 (1-4) (1988), 51-58.*
*10. R C Gupta, New Indian values of π from the 'Manava'sulba sutra', Centaurus 31 (2) (1988), 114-125.*
*11. R C Gupta, Lindemann's discovery of the transcendence of π : a centenary tribute, Ganita Bharati 4 (3-4) (1982), 102-108.*
*12. R C Gupta, Some ancient values of pi and their use in India, Math. Education 9 (1975), B1-B5.*
*13. R C Gupta, Madhava's and other medieval Indian values of pi, Math. Education 9 (3) (1975), B45-B48.*
*14. R C Gupta, Aryabhata I's value of π, Math. Education 7 (1973), B17-B20.*
*15. T Hayashi, T Kusuba and M Yano, Indian values for π derived from Aryabhata's value, Historia Sci. 37 (1989), 1-16.*
*16. E W Hobson, Squaring the circle (London, 1953).*
*17. C Jami, Une histoire chinoise du 'nombre π', Archive for History of Exact Sciences 38 (1) (1988), 39-50.*

*18. S K Jha, and M Jha, A study of the value of π known to ancient Hindu and Jaina mathematicians, J. Bihar Math. Soc. 13 (1990), 38-44.*
*19. P Jha, Aryabhata I and the value of π, Math. Ed. (Siwan) 16 (3) (1982), 54-59.*
*20. R P Kulkarni, The value of π known to Sulbasutrakaras, Indian J. Hist. Sci. 13 (1) (1978), 32-41.*
*21. K Nakamura, On the sprout and setback of the concept of mathematical "proof" in the Edo period in Japan : regarding the method of calculating number π, Historia Sci. (2) 3 (3) (1994), 185-199.*
*22. C T Rajagopal and T V Vedamurti Aiyar, A Hindu approximation to pi, Scripta Math. 18 (1952), 25-30.*
*23. R Roy, The discovery of the series formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, Math. Mag. 63 (5) (1990), 291-306.*
*24. C Pereira da Silva, A brief history of the number π (Portuguese), Bol. Soc. Paran. Mat. (2) 7 (1) (1986), 1-8.*
*25. D Singmaster, The legal values of pi, Math. Intelligencer 7 (2) (1985), 69-72.*
*26. M D Stern, A remarkable approximation to π, Math. Gaz. 69 (449) (1985), 218-219.*
*27. P E Trier, Pi revisited, Bull. Inst. Math. Appl. 25 (3-4) (1989), 74-77.*
*28. I Tweddle, John Machin and Robert Simson on inverse-tangent series for π, Archive for History of Exact Sciences 42 (1) (1991), 1-14.*
*29. A Volkov, Calculation of π in ancient China : from Liu Hui to Zu Chongzhi, Historia Sci. (2) 4 (2) (1994), 139-157.*
*30. Y-L Zha, Research on Tsu Ch'ung-Chih's approximate method for π, in Science and technology in Chinese civilization (Teaneck, NJ, 1987), 77-85.*

**Enlace: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages.html**

# Historietas de Pi

by Ramón Llorens Moreno

## Citas

Antes de leer mi relato leer estas citas y pensarlas un poco ...

"**Si consideramos el mundo de relaciones geométricas, allí duerme el milésimo decimal de Pi, aunque**
**jamás nadie trate de calcularlo**."
William James, *The Meaning of Truth*

"**El rostro de Pi estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar**
**con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y**
**enigmáticos**."
Bertrand Russell, *Nightmares of Eminent Persons*

"**Los decimales no calculados de pi, duermen en un misterioso reino abstracto, donde gozan de una débil realidad, hasta que no son calculados, no se convierten en algo plenament real, e incluso entonces su realidad es mera cuestión de grado**"
William James, *The Meaning of Truth*

"**... ese misterioso 3,14159... que se cuela por todas las puertas y ventanas, que se desliza por**
**cualquier chimenea...**"
Si se toman al azar dos números naturales (enteros positivos) la probabilidad de que carezcan de divisores comunes es 6/Pi^2 .

"**¡ Mamá, mamá! ¿ Por qué al andar no hago más que dar vueltas?**"
"**Niño, si no te callas te clavo al suelo el otro pie**"
Chiste de humor negro (1955)

"**En la circunferencia, el comienzo y el fin coinciden**."
Heráclito (c.544-480 a. C.); filósofo griego

Estas frases valen más que todo el relato que cito a continuación, pero si queréis seguir leyendo...
vosotros mismos.

## Introducción

En primavera de 1994 cayó en mis manos un libro del conocido Martin Gardner, prestigioso filósofo de la ciencia, el libro se llamaba Crónicas Marcianas y otros ensayos sobre fantasía y ciencia. Como es sabido, Crónicas Marcianas es el título de un libro de Ray Bradbury, a partir del cual Martín Gardner realiza amplios comentarios.

La cuestión es que, me dio por releerlo y llegué al capítulo sobre el cálculo de los decimales de Pi que me atrajo extraordinariamente. En él hablaba de un gran matemático inglés del siglo pasado llamado Guillermo Shanks, que se pasó 20 años de su vida calculando decimales de pi "**a mano**" y sólo llegó hasta el decimal 707, después de pasarse 20 años de su vida en ello. Esto me hizo pensar mucho, incluso me pasé una noche en blanco imaginando la vida de Shanks.
De los decimales que calculó sólo eran correctos 527.

*El error no se descubrió hasta 63 años más tarde. Y ese error no se reveló hasta el año 1945 por otro matemático inglés llamado D. F. Ferguson.*

Posteriormente, dos matemáticos norteamericanos: John W. Wrench, Jr y Levi B. Smith, llegaron a los 1.120 decimales en el año 1947 utilizando una calculadora preelectrónica. Después la cantidad de decimales fue creciendo y creciendo de manera asombrosa...hasta el dia de hoy...

Me puse a trabajar inmediatamente al dia siguiente, preparando un programa basado en el Algoritmo de matemático John Wallis para obtener dígitos a través de una hoja de cálculo de Lotus 123TM (versión 2.4) con macros. Mi tosco programa en un principio trabajaba a unos 1000 impares por segundo, después lo lleve a 2413 impares.

El programa no me parecía muy óptimo, así que pedí ayuda a mi amigo **Mariano Egurrola** que en una primera optimización con un programa en Turbo C ++ llegaba a 54000 impares y posteriormente, en un procesador Intel 486 50Mhz hasta 217803. Realmente la cifra es realmente alta. Podríamos llegar al decimal 12, 15, pero lo único que conseguiríamos es tener el ordenador conectado días y días, ya que cada decimal se esconde más y más.

La realización de estos cálculos se prolongó durante dos días. Al cabo de este tiempo nos dimos cuenta de que el camino que habíamos seguido hasta entonces no era el correcto, ya que cada vez había que calcular más y más cada dígito hasta límites desconocidos. En otras palabras cada decimal nuevo costaba más de calcular que el anterior. (*estaba más escondido*).

Llegamos a la conclusión de que debíamos dejar una máquina calculando. Pero para sacar 10 dígitos decimales, los últimos que calcularía. Dejamos una máquina en funcionamiento e imprimiendo durante un mes. Imprimía 1 página diaria aproximadamente.

El método de Wallis es muy ingenioso, pero sirve para obtener pocos decimales.

A partir de aquí, solamente teníamos dos opciones: una de ellas era utilizar otro algoritmo. Y la otra, una maquina más potente.

Al no tener maquinas más potentes (1994) la solución fue estudiar el tema mucho más a fondo. Así que me dediqué a estudiar distintos algoritmos y la historia de pi a lo largo de los tiempos para llegar de alguna forma a conocer más a pi.

## Procedimientos y Búsquedas

Está muy claro que el célebre matemático inglés llamado “Guillermo” no utilizó el algoritmo de Wallis, seguro que no, pues pasó 20 años calculando los decimales a mano, y un ordenador

(Intel 486) de 1995 calcula bastante rápido, aproximadamente 288.001 impares cada 2 minutos, que no es poco. Probé con la versión 3.4 de Lotus 1-2-3TM y disponiendo de gran cantidad de memoria, realizando 8001 cálculos en cada bucle, y los resultados fueron similares a los que había obtenido con los primeros cálculos. Así que definitivamente, a partir de esta demostración había que intentar resolver el problema por otros caminos.

Buscando en infinidad de manuales leí que el equipo que más decimales había conseguido que era el equipo de **Tamura y Kanada** de la Universidad de Tokio a través de su nuevo algoritmo. Un procedimiento de cálculo sistemático que inventó hace una década Eugene Salamin en MIT. Este algoritmo se basa en una serie infinita de fracciones que, cuando se extiende, converge con gran rapidez sobre el número pi. El número de dígitos calculado se duplica a cada paso, esto explica por qué las cifras de Tokio son potencias de 2. Curiosamente, en 1818 este algoritmo ya había sido publicado por un genio matemático alemán llamado Carl Friedrich Gauss.

## Algoritmos y Métodos encontrados

### Algoritmo John Wallis

= 2 ( 2/1 x 2/3 x 4/3 x 4/5 x 6/5 x 6/7 ....)

### Algoritmo Gottfried Wilhem von Leibniz

= 4(1/1-1/3+1/5-1/7+1/9...)

### Método de Georges Luis Leclerc Buffon

Método de las agujas del que resulta un número poco exacto de pi. Primero hay que preparar una rejilla de 7 lineas horizontales de unos 10 cm de ancho y la separación entre las lineas será de 1,3 cm. Ahora tirararemos 4 trocitos de palillos de dientes de una longitud 0,65 cm. Si un palillo cae encima o atraviesa una de las líneas se anota un punto. Se anota el numero de puntos en 25 lanzamientos de los 4 palillos. Hay que dividir el total de palillos lanzados (100) entre el total de puntos conseguidos, ¿cual es el cociente? 100/30=3,3333 si esto se realiza muchisimas veces parece que se acerca a pi, mirar las simulaciones en los links de abajo.Buffon utilizaba un alfiler en vez de un palillo. Si lo quereis hacer con otras cosas recordar que la distancia entre las lineas ha de ser el doble longitud de lo que lanceis. Si os interesa el tema visitar los enlaces que valen la pena ya que se pueden realizar miles de lanzamientos.

**http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html**
**http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/buffon.html**

### Método Montecarlo

Se trata de unos monos que tiran dardos sobre un tablero cuadrado con una circunferencia inscrita.
Si se miran los que entran dentro de la circunferencia y fuera, se observa su relación, podemos llegar a pi algo mejor que con el método de Buffon, pero no es demasiado bueno apenas nos da 2 o 3 decimales.

## Historia de $\pi$

Viendo que la cosa iba para largo me dediqué a revisar históricamente a nuestro pi.

### - En el Antiguo Egipto

Se consideraba pi = 3,1605

### - En Antigua Babilonia

pi =3

### - En China

se dan variedad de resultados en la antigüedad (Grandes matemáticos)

S. I pi =3,1447
S. II pi=3,10
S. III pi = 3,14
Polígono de 192 lados se comenta que evolucionó hasta el polígono de 3072 lados ---> pi =3,14159
S. V d.C un genial astrónomo chino llamado Tsu Ch'ung calculó que pi se acerca enormemente a 355/113.
En occidente hubo que esperar 1000 años para alcanzar este nivel.

-**Europa**
El genio de Arquímedes sabía que pi estaba entre 3 + 10/71 < pi < 3 + 1/7
La Biblia da a pi el valor 3
En el S. XVIII Lambert y A Legendre demostraron que pi no es un número racional.
El matemático y arquitecto militar holandés Ludolph Van Cenlen determinó primero 20 y después 35 cifras decimales del número pi. Van Cenlen fue el primero en superar los resultados del matemático de Asia central Kashi.

-**Oriente Medio**
Los Arabes tenían un arsenal de matemáticos, y obtuvieron 17 decimales exactos del número pi a través de los polígonos inscritos en una circunferencia. Estos cálculos fueron realizados en la primera mitad del siglo XV y fueron llevados hasta la determinación del lado del polígono regular de 2832 Lados (Kashi). Para valorar más correctamente las proezas de los excelentes matemáticos árabes comentaremos que, al cabo de más de 150 años, en 1593, en Europa, F. Viete encontró solo 9 cifras exactas de pi mediante un polígono de 1722 lados.
Sólo a finales del siglo XVI y comienzos de XVII, Van Roomen repitió el resultado de Kashi y posteriormente lo supero en Holanda (1539-1610).

## Comentarios

A propósito, la precisión de pi no era reclamada por exigencias prácticas. El móvil de esta búsqueda por parte de tantos matemáticos a lo largo de la historia fue: o la tendencia vanidosa de demostrar su maestría en el cálculo, o el esfuerzo ingenuo de "agarrar por los cuernos", con cálculos directos, el problema de la determinación de la naturaleza del número pi.

A partir de aquí, pensé que analizar la idea del polígono inscrito en la circunferencia tal como lo habían hecho los Arabes. Así que me puse manos a la obra y obtuve estos resultados.

Polígono inscrito en una circunferencia:
Nota: Solo pondré los decimales de pi verdaderos

| Lados | Numero Obtenido |
|---:|---:|
| 36 | 3,1 |
| 360 | 3,141 |
| 3.600 | 3,14159 |
| 36.000 | 3,1415926 |
| 360.000 | 3,141592653 |
| 3.600.000 | 3,14159265358 |
| 36.000.000 | 3,1415926535897 |
| 360.000.000 | 3,141592653589793. |
| 3.600.000.000 | 3,14159265358979324 |

**Trabajar solo con el poligono inscrito no es una buena idea, sino que hay que trabajar con el poligono inscrito
y circunscrito como ya hizo Arquimedes tiempos atrás.**

## Últimas Búsquedas

Después conseguí a través de la BBS de **Javier Sanchez Alcazar** Smart BBS, un programa de Tony Stalls en MS/DOS (**pi.zip**) para el calculo de pi que desarrollaba la serie de Leibniz de nuevo pero con gran rapidez. Este programa estaba inspirado en un Articulo de Ivar's Peterson publicado en la revista Science News, Vol 129, Nº6, pág. 91, titulado "Millones de dígitos de pi" que nos relata los esfuerzos de David H,Bailede -NASA'S Ames Research Center-, para calcular con la ayuda de un Cray-2 el valor de pi, con 29.360.128 dígitos. Pero Tony Stalls no se dió cuenta que con su algoritmo de Leibniz, no puede llegar muy lejos, aunque tenga la potencia de "100 Cray-2"!!!. Ya que cada decimal cuesta 10 veces más de obtener que el anterior, aunque el tiempo inicial sea muy bajo, a la que llevemos 25 decimales será casi imposible continuar. Esta circunstancia se asemeja a a la relatada en la famosa paradoja del tablero de ajedrez y el grano de arroz que se va duplicando casilla a casilla; si sumamos todos los granitos de arroz de todas las casillas nos da una cifra absolutamente gigantesca.

Pues el problema del algoritmo de Leibniz consiste en que no se duplica sino que se multiplica por 10, así que es mucho peor.

Había que buscar otras soluciones. Busqué en la Biblioteca de Matemáticas de la Universidad de Barcelona más información,
me comentaron que había un especialista en numerología llamado Jordi Guardia. Desgraciadamente, no lo encontré, y
tampoco encontré ningún libro que me orientase.

Al no hallar otra salida me dediqué de nuevo a mirar a fondo los que ya tenía, intentando extraer alguna idea más.

## Curiosidades encontradas :

En 1983, Rajan Mahadevan fue capaz de recitar de memoria 31.811 decimales de pi.
En 1610 el alemán Ludolph von Celem llegó a obtener 35 decimales de pi.
Esta aproximación la grabaron en su tumba y aún hoy llaman a pi en Alemania numero de ludolphine.

## Sorpresa final (en 1994)

Pero cual fue mi sorpresa cuando Mariano Egurrola, mi gran colaborador y amigo en este pasatiempo, me trajo un programa en "C" que calculaba decimales del número pi como si fuesen "churros". No sé de donde lo sacó. Este programa calculaba 100 decimales prácticamente en un tiempo despreciable y 10.000 dígitos en unas pocas horas. Estaba programado por Bill Davidsen a partir del método de G.M.Roe, basado en una versión para "E" suministrada con el compilador de lenguaje "B" en 1970, modificado por Alexander Morris en Septiembre de 1987, para hacerlo plenamente compatible con Borland Turbo "C". El programa fue modificado de nuevo por Jeff Smith en Junio de 1990, para poder poner un nombre de fichero y poder ver luego el resultado. Mariano Egurrola realizó sobre el programa las modificaciones necesarias para eliminar la limitación de decimales por la cantidad de RAM, e implementó el report de tiempo de inicio y tiempo de fin del calculo.

### El programa para calcular Pi en 1994 !!!
### (Ejecutable para MS/DOS Pitote.zip)

**Programa Fuente Pi.c**

Posteriormente le pedí que calculara **16.000** y esos son los que veis en mi página WEB

Los tiempos avanzan, hoy en dia hoy para calcular Pi tienes lo siguiente, muchisimo más bueno y mejor de largo.

Os recomiendo **encarecidamente** que visites la web para que te lo bajes de allí el más actualizado, y si esta muy ocupado
el sistema te puedes bajar una versión de antes.

**PiFast** version 3.2, by **Xavier Gourdon** para W95/W98 y NT.

Links de Xavier Gourdon donde bajaros el mejor programa.
**http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html**
**http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/Algorithms/splitting.html**

Otros Links Interesantes:

Calculating Pi using Elementary Calculus
**http://www.ams.org/new-in-math/cover/pi-calc.html**

Fibonacci Numbers and the Golden Section
**http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html**

## Grandes Colaboraciones de amigos de Pi.

Te gusta el tema de Pi, tienes algo que contarnos y quieres que aparezca aqui, solo tienes que enviarnos un mail con tu colaboración y aparecera aqui, creo que entre todos, Pi se comprenderá un poco más. Si la colaboración es muy grande se podrá como una página web nueva. como estas:

- **Nuevo algoritmo** (Fernando Valdes, Colombia)
- **Mensajes Ocultos en Pi** (Mario Peral Manzo, Mexico)
- **Cuadratura (Aprox) del Circulo** (Carlos Martín Piera, Spain)
- **Leonardo da Vinci y la cuadratura Humana** (Carlos Martín Piera, Spain)
- **La proporcion Aurea y la Gran Piramide**(Abelardo Falletti; Argentina)
- **Significado de la cuadratura del circulo** (Abelardo Falletti; Argentina)
- **Las aventuras de Pi** (Alberto Espinoza Castillo, Peru)
- **El cuadrado analógico (Hipercuadrado)** (Mario Peral Manzo, Mexico)

---

E-mail

Bibliografías Recomendadas sobre Pi
(Por el Autor de la página y los Amigos del número pi)

Título:*Crónicas marcianas y otros ensayos sobre fantasía y ciencia.*
Autor: Martin Gardner
Editorial:Paidós Studio (Ediciones PAIDOS) Nº 93
ISBN 84-7509-809-6

Título:*Nuevos pasatiempos matemáticos*
Autor: Martin Gardner
Editorial:Alianza Editorial (El libro de bolsillo)
ISBN 84-206-1391-6

Título: Estimar les matemàtiques
Autor: Claudi Alsina i Català
Editorial: Columna Assaig Eines 4
ISBN 84-664-0017-6

Título:*La cresta del pavo real*
*(Las matemáticas y sus raíces no europeas)*
Autor:George Gheverghese Joseph
Editorial:Piramide
ISBN 84-368-0975-0

Título: *EL SECRETO de los NÚMEROS*
Autor: André Jouette
Editorial: MA NON TROPPO
ISBN 84-95601-00-1

Título: *Historia de las Matemáticas*
Autor: K. Ríbnikov
Editorial: Mir Moscú
ISBN 5-03-001912-X

Título: *Arquímedes Alrededor del círculo*
Autor: R Torija Herrera
Editorial: nivola
ISBN 84-930719-1-9

Título: *Arquímedes y la palanca*
Autor: Paul Strathen
Editorial: Siglo veintiuno editores
ISBN 84-233-1016-6

Título: Historia de la matemática
Volumen 1 -> De la antigüedad a la baja Edad Media
Autores: Julio Rey Pastor y José Babini
Editorial: gedisa editorial
ISBN 84-7432-807-1

Título:*Los números y sus misterios*
Autor:André Warusfel
Editorial: Martínez Roca

Título: *Un club matemático para la diversidad*
Autor: Mª Luz Callejo
Editorial: narcea
ISBN 84-277-1070-4

Título:*The Computer Science Problem Solver*
Autor: Equipo de Investigación y Educación ( Director Dr M. Fogiel )
Editorial: Research and Education Association
ISBN 0-87891-525-7

**Otros Libros Interesantes ( Matemáticas )**

Título: *Galileo (Antología)*
Edición de Víctor Navarro
Editorial: Textos Cardinales / Ediciones Península
ISBN 84-297-3272-1

Título: *Galileo At Work*
His Scientific Biography
Autor: Stillman Drake
Editorial: Dover Publications, INC (NY)
ISBN 0-486-28631-2

Título: *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*
Autor: Apostolos Doxiadis
Editorial: Ediciones B (Grupo Z)
ISBN 84-406-9490-3

Título:*El diablo de los Números*
Autor*:* Hans Magnus Enzensberger
Editorial*:* Siruela
ISBN 84-7844-374-6

Título:*El Laberinto mágico*
Autor*:* Ian Stewart
Editorial*:* Crítica (Drakontos)
ISBN 84-8432-193-2

Título: *Pitágoras (El filósofo del número)*
Autor: Pedro Miguel González Urbaneja
Editorial: Nivola ( La matemática en sus personajes)
ISBN 84-95599-08-2

Nota: Los links son perecederos ya que Internet es un sistema muy vivo asi que si no encontrais las cosas
a usar los buscadores que para eso están.  ;-)

Si buscas en **google**, **yahoo** o **altavista** encontrarás de todo o casi.

*Doy las gracias a todos los amigos de Pi y en especial a Nuri y Merche por la super paciencia que tienen conmigo,*
*para realizar esta web sin ningún animo de lucro y con afan constructivo de hacer llegar las matemáticas al*
*máximo numero de personas.*

## LA CUADRATURA DEL CIRCULO: UN PROBLEMA INSOLUBLE PERO DIVERTIDO.

Aunque hace tiempo que se sabe que la cuadratura con regla y compás es imposible (de hecho se ha convertido en el paradigma de problema insoluble) el buscar soluciones aproximadas resulta ser un interesante desafío de geometría recreativa.
Parece que en otro (?) tiempo hubo personas que soñando con la indudable fama que les proporcionaría resolver este problema se ofuscaron peligrosamente en él. No se pretende aquí resucitar tan

peligrosa enfermedad. Se trata solo de un juego que podría tener una cierta utilidad pedagógica. Y que, al menos hasta donde yo he explorado, requiere solo unos conocimientos mas bien elementales de geometría. (Poco mas que el teorema de Thales y, por supuesto el de Pitágoras)

Si se trata de explicar en que consiste realmente el problema, resulta altamente instructivo proponer una construcción
aproximada de la cuadratura del círculo de modo que se pueda experimentar con lápiz y papel en que consiste tal problema.

Una construcción geométrica aproximada de la cuadratura del círculo con regla y compás con tales fines "pedagógicos"
o simplemente recreativos debería cumplir los siguientes requisitos:

1) la **aproximación** de pi debería ser la **mejor** posible
2) el **número de pasos** debería ser el **mínimo** posible
3) la construcción debería poder hacerse siguiendo la lógica de cualquier problema: partir del dato ... para llegar a la
solución, en este caso partir del **radio** del círculo (el **dato**) para llegar al lado del **cuadrado** (**la solución**).

Por ejemplo (ver Fig. 1) partiendo del radio OF (dato) de la circunferencia a cuadrar se haya su mitad (punto A) y luego la mitad de esta, es decir la cuarta parte del radio, de modo que se obtenga un segmento igual a 5/4 del radio (segmento OB) y tomando como radio este segmento se traza una circunferencia con el mismo centro (O) de la circunferencia de partida: los puntos de corte de esta circunferencia con los ejes de coordenadas (C, D E y F) nos dan los cuatro vértices del cuadrado solución.

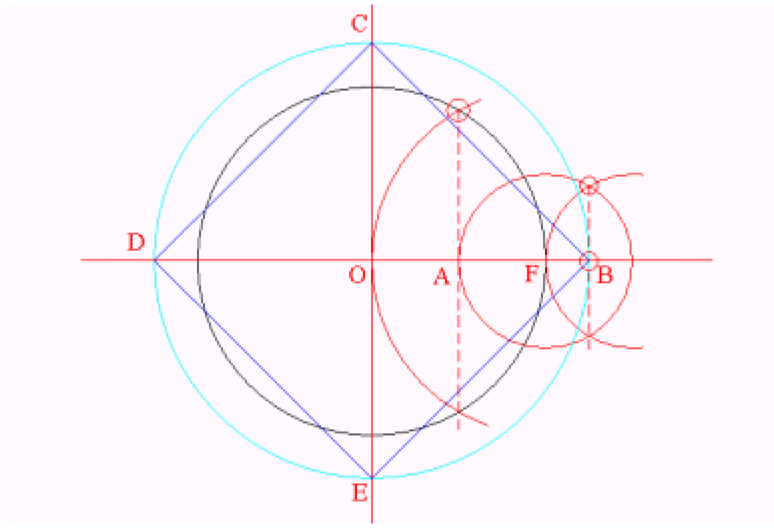



**Fig. 1**

Este ejemplo reúne las condiciones 2 y 3 pero el valor de pi utilizado es

$$\pi \cong \left(\frac{5}{4}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{25\cdot 2}{16} = 3.125 \quad (\acute{o}\ 3\ y\ 1/8)$$

que es obviamente muy pobre (aunque con cierto valor histórico pues el que parece ser que utilizaban los babilonios 2000 años AC).
(Nota: en los ejemplos se ha utilizado un radio elegido al azar en 30 unidades. Todos los dibujos son igualmente válidos con cualquier otra medida.)

En la tabla siguiente se recogen en orden de aproximación creciente algunas construcciones aproximadas
de la cuadratura del círculo:

| **Construcción** (del lado del cuadrado problema) | **Valor de pi equivalente** | **Error relativo (ppm)** (1) | **Origen** | **Notas** |
|---|---|---|---|---|
| Efectuar sobre el diámetro dos divisiones por tres sucesivas para obtener los 8/9 de él | (16/9)2 = 4(8/9)2 = 3.16049 | ~ 6000 | El papiro Rhind1650 AC | |
| Hipotenusa del rectángulo isósceles de cateto = 5/4 R | [(5raiz(2))/4]^2 = 3.125 | ~ 5300 | Babilonia 2000 AC | |
| Ver el texto:"CUADRATURA DE KEOPS": | 4/raiz(fi) = 3.1446 | 959 | ¿Egipto? | ¿utilizada e la pirámide de Keops? |
| Ver el texto:"CUADRATURA DE 22/7" | 22/7 = 3.14286 | 402 | ?? | Arquímede manejo esta aproximaci como "cota superior" |
| Cuadratura C.Calvimontes(Ver:**http://www.urbtecto.com/** Cuadratura inspirada en un dibujo de Leonardo | (3.1411092...) | 154 | | Leonardo estudió cuadraturas gráficas y mecánicas |
| Sumar al cuadrado (R fi)2 otro igual a 1/5 del anterior | 6/5 fi^2 = 3.1416408 | 15 | Hobson 1913 (2) | |
| Hipotenusa del rectángulo de catetos 7/4 R y 9/32 R | (56^2+9^2)/32^2 = 3.14160156 | 2.8 | CMP | Realizable 13 pasos |
| Ver el texto | 355/113= 3.14159292 | 0.085 | Ramanujan 1913 (2), (3), (5) | La fracción 355/113 ha sido atribui |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | a Tsu Ch'un Chi |
| Ver descripción en el texto | [(45raiz(2)(fi+1))/94]^2 = 3.141592685 | 0.01 | Abelardo Falleti | |
| ? | (9^2+19^2/22)^(1/4) = 3.14159265258 | 0.00032 | Ramanujan 1914 (2) (4) | |

(1) partes por millón = ((va - pi)/pi)·1000000; va = valor aproximado de la construcción. Una forma mas gráfica de
visualizar la "ppm" es pensar en **milímetros de error** cometidos **por** cada **Km**

(2) citado en **http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html**

(3) publicado en el Journal of Indian Mathematical Society.

(4) Publicado en el Quarterly Journal of Mathematics XLV (1914), 350-374, ambas referencias tomadas del anterior link.

(5) La descrita aquí podría no ser la original de Ramanujan
fi = razón áurea = 1.618033989
? = No he podido consultar las citas originales. Se agradecerá quien pueda proporcionarlas

Aunque contiene algunos datos históricos la tabla anterior no refleja ni de lejos el enorme esfuerzo que a lo largo
de la historia se ha dedicado a tan peculiar problema. Para empezar no menciona a Apolonio y sus cónicas, al-Haytham,
Cusa, Bernoilli, Hobbes y mas, (ver la página matriz de Ramón). Además me hubiera gustado añadir alguna de las
cuadraturas de esos pobres olvidados amateurs que a mediados del siglo XVIII todavía intentaban convencer a las
academias de haber resuelto el problema.

Desde Arquímedes en adelante los matemáticos mas "conscientes" intentaron aportar "demostraciones" (la palabra clave
en matemáticas) de sus soluciones al problema. Pero al mismo tiempo muchos de ellos cayeron atrapados en algo que
los humanos digerimos muy mal: las **coincidencias**. Quizás el caso mas clamoroso de esa trampa lo protagonizó Hobbes,
quien por otro lado, no era precisamente un estúpido.

La tabla que presento contiene algunas notables coincidencias junta a alguna que no lo es tanto. Mi propuesta es jugar
con ellas. Descubrir lo que de divertido hay en "resolver" la cuadratura del círculo. Pero sin olvidar que estamos jugando,
que el problema ha quedado no-resuelto para siempre.

Es verdad que el sentido común nos lleva con frecuencia a acertar cuando nos decimos que "algo tendrá que haber detrás..."
porque si no "...es demasiada casualidad...". Pero si las matemáticas tiene algo de

especial es precisamente el que tales
asertos de "sentido común" no suelen significar nada. Lo cual no impide que a muchas coincidencias se le busquen
significados ocultos, mágicos, ... y lo que Vds. quieran.

Hablando de coincidencias: mi favorita es sin duda alguna la que aparece en la estupenda colaboración de Alberto Espinoza
y que viene del Apocalipsis 4ª 13-18 "*... porque es número de hombre. Su número es 666.*."

¿Qué mas se puede pedir?

Pasen y vean.

## Cuadraturas, razón áurea y pirámide de Keops.

En la tabla anterior se indican tres "cuadraturas" en las que interviene el número fi =razón áurea (1.618033989...).
Si resulta atractivo mezclar dos números tan especiales como pi y fi, no digamos cuando ambos parecen encontrase
reflejados en las medidas de la Gran Pirámide de Giza construida hace unos 4500 años para el faraón Keops (o Khufu).
Veamos como se puede mezclar todo esto.

Podemos definir dos "pirámides teóricas" (tomado de: **http://www.access.ch/circle/text1.html** ) (Fig. 2)

· La pirámide de Taylor que se define como aquella en que la mitad del perímetro de la base es igual a
la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es la altura (ver figura). Es decir 4l = 2pih y también
h=2l/pi. Definida así, es fácil ver que el área del círculo es igual a la del triángulo-sección : pi(h/2)^2= (lh)/2.

· La pirámide "áurea" que es aquella donde la apotema están en razón áurea de la mitad del lado:
ap/(l/2)=fi. Aquí ocurre que h=(l/2)raíz(fi)

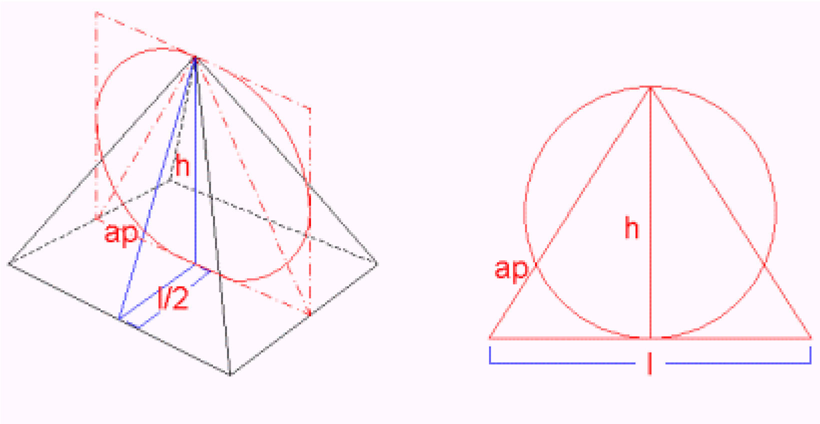



**Fig. 2**

SI AMBAS PIRAMIDES fuesen LA MISMA entonces podríamos igualar las dos expresiones de h, es decir:

$$\frac{2l}{\pi} = \frac{l}{2}\sqrt{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \pi \cong \frac{4}{\sqrt{\Phi}}$$

En realidad 4/raiz(fi) = 3.1446... Esta aproximación de pi tiene un error del orden del 1 por mil.
Y ocurre que las estimaciones de las medidas reales de la pirámide de Keops vienen a tener
precisamente un margen de error del mismo orden (unos 20 cm, mas o menos, en un lado de 230 m)
(ver medidas detalladas en: **http://www.aloha.net/~hawmtn/pyramid.htm** ) .
¿Cual de los dos números pi o fi tenía en la cabeza el constructor de la pirámide de Keops?

¿Como tropezaron (si es que lo hicieron) los egipcios con la coincidencia:

$$\pi \cong \frac{4}{\sqrt{\Phi}}$$

¿ o, antes de eso, fueron conocedores de la razón áurea? ...
estas y otras parecidas son cuestiones que han dado mucho juego.
Ver p.ej., **http://www.sover.net/~rc/deep_secrets/index.html**

Y no falta quien afirma sin despeinarse que los egipcios habían resuelto la cuadratura del círculo
(**http://www.akenaton.com/Curiosidades/curiosidad.htm**)

Fascinante si que es, pero cierto ...

Veamos como podría ser la

"CUADRATURA DE KEOPS":
Partiendo de la circunferencia que tiene por diámetro la altura de la pirámide se construye la razón áurea por el método convencional: en el triángulo rectángulo de catetos la altura y su mitad (es decir, el radio) obtenemos el punto A, que nos da el radio del arco con el que obtenemos los puntos B y B'; las rectas que parten de la cúspide, pasan por B y B' y llegan hasta "suelo" (C) nos dan los lados del triángulo sección (Fig. 3)

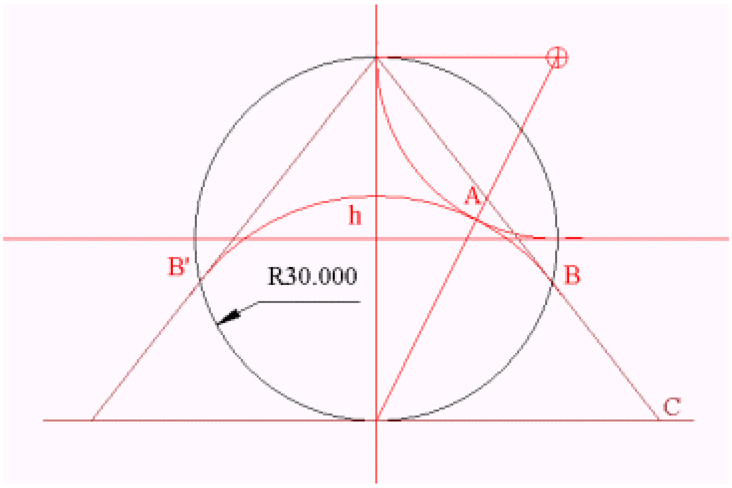



**Fig. 3**

; el lado del cuadrado se obtiene ahora haciendo uso de la proposición 14 del libro II de Euclides: se traza la circunferencia de diámetro h + l/2 (altura mas la mitad de la base) y se prolonga el lado-base hasta cortarla en el punto E: el segmento OE es el lado del cuadrado buscado

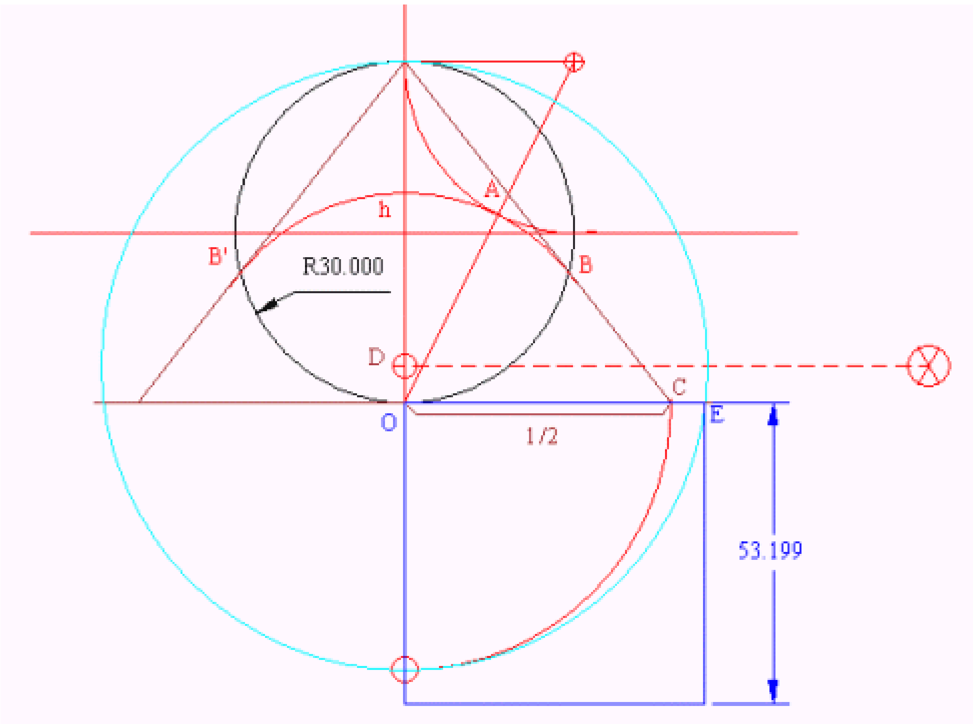



**Fig. 4**

El Sol, el círculo solar, era sin duda algo esencial para los egipcios así que no sería extraño encontrar relaciones entre las
pirámides y el círculo.

En cuanto a aproximaciones de pi, aparte de la documentada en el papiro Rhind, cabe preguntarse si los egipcios no
hubiesen elegido una aproximación de pi mas simple y mejor que la fórmula con fi. Me refiero a la fracción **22/7**.

Lo interesante de esta fracción es que Arquímedes la reconoció como **aproximación** de **pi**. De haber creído que
22/7 "era" pi tal vez nos hubiese legado una cuadratura mas o menos como esta. Y a estas alturas no le consideraríamos
como el genio que fue.

"CUADRATURA DE 22/7"
Nota: esta no es la única construcción posible con la aproximación de 22/7 pero es la que me gusta a mi.

La construcción es como sigue (Fig. 5):

1. Hallar la mitad del radio R=OC y trazar un arco con centro en A y radio igual a 3/2 de R para hallar el punto B.

2. Construir el triángulo rectángulo ABC y sobre su cateto CB

llevar la mitad de R para hallar el punto D.

3. Trazar una paralela al eje horizontal desde D hasta cortar al cateto opuesto y hallar así el punto E.

4. Desde E trazar una paralela al cateto CB hasta cortar al eje horizontal en F y desde aquí bajar una vertical hasta el corte en G con la diagonal del tercer cuadrante de la circunferencia origen.

5. La hipotenusa del triángulo rectángulo GAH es el lado del cuadrado buscado.

El sufrido lector puede ejercitarse en verificar que esta construcción usa como aproximación de pi:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8}{7} + 2 = \frac{22}{7}$$

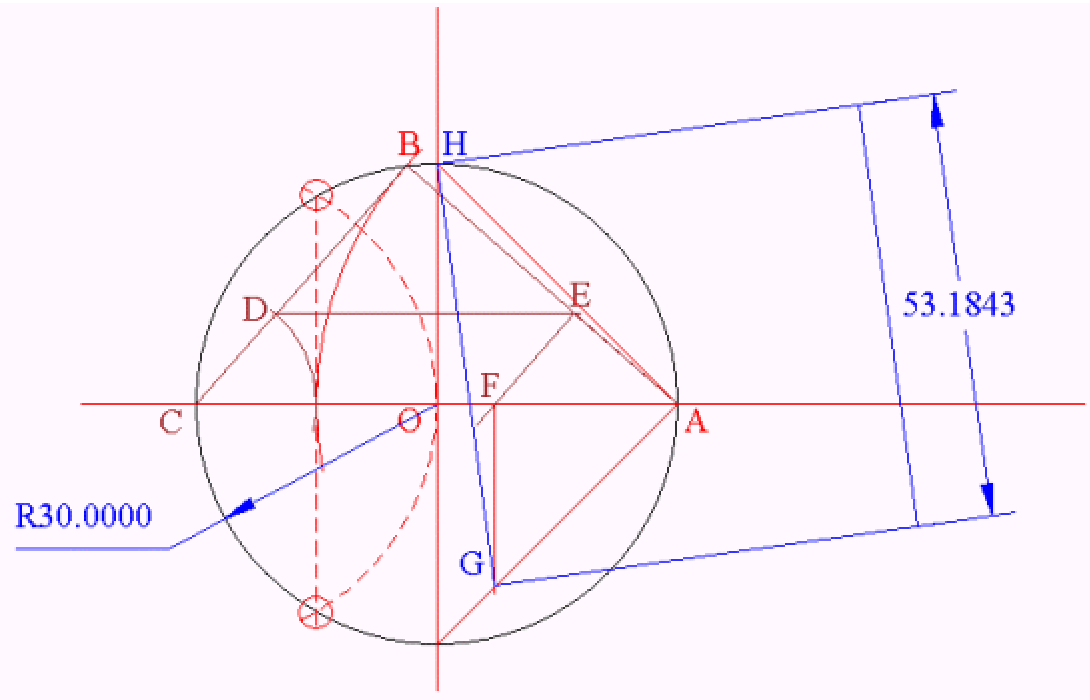



**Fig. 5**

Esta construcción ejemplifica una cuestión curiosa: no siempre una aproximación aparentemente sencilla como la de 22/7 se traduce en una construcción geométrica igualmente sencilla. (Y si alguien encuentra otra mas sencilla, por favor, que me lo diga))

## La razón áurea otra vez

Volvamos al tema de pi y fi. Existen desde luego relaciones matemáticas exactas entre ambos números, p.ej:

$$\pi = 5\cdot\left[\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}\right)^7 + \cdots\right]$$

(basada en la serie que da pi en función de la arcotangente de ángulos menores de 45º, en este caso del de 36º o
pi/5 radianes).

O también:

$$\Phi = 2\cdot\left[1 - \frac{\pi^2}{5^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4}{5^4\cdot 4!} - \frac{\pi^6}{5^6\cdot 6!} + \frac{\pi^8}{5^8\cdot 8!} - \cdots\right]$$

(tomado de:
**http://www.mcs.surrey.ac.uk/personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html**)

Además existe una relación entre la serie de Fibonacci y pi, excelentemente explicada en:
**http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html**

Nota: la primera serie aunque tiene a la pi "despejada" es de convergencia muy lenta ya que para lograr un pi con error inferior a 1 ppm es preciso sumar los 16 primeros términos.
La segunda converge mas rápidamente ya que con los 4 primeros términos ya se reduce el error a unas 5 ppm pero el problema entonces es despejar pi ¡!.

A mi entender no cabe extraer de tales fórmulas un grupo con los primeros términos que nos
diese una fórmula suficientemente aproximada y manejable para "cuadraturas".
Así que volvamos a las coincidencias.

Otra fórmula aproximada (tal vez la mas simple y elegante de las "coincidencias" con fi) y que permite una cuadratura muy interesante es:

$$\pi \cong \frac{6}{5}\Phi^2$$

Esta fórmula (a diferencia de las otras aquí comentadas) obliga a operar desde el principio con cuadrados. En concreto obliga a dividir el cuadrado (fi R)2 en cinco para poder construir la suma 1 + 1/5 = 6/5. La división de un cuadrado en cinco áreas iguales (Fig. 6), es decir, la obtención del cuadrado 1/5, nos da una bonita figura:

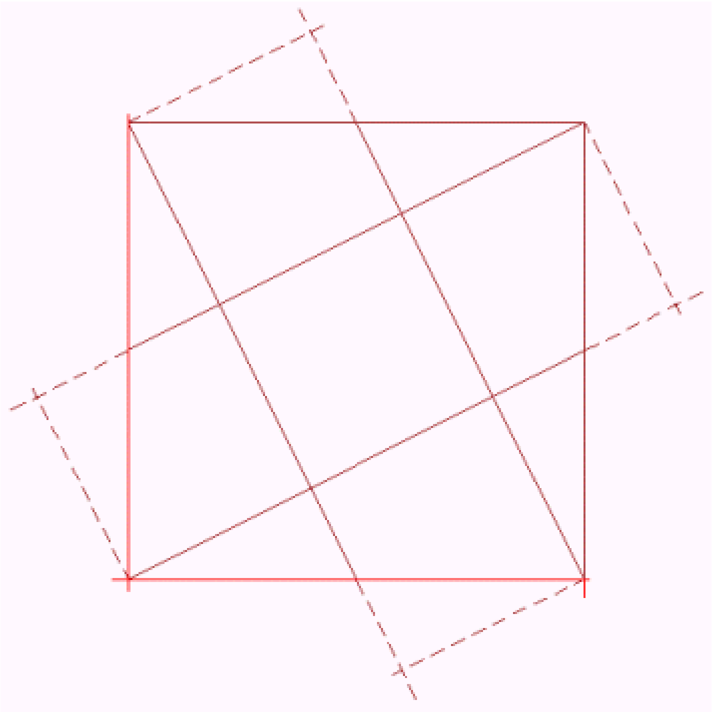


**Fig. 6**

Visto esto, la construcción de esta cuadratura resulta sencilla y elegante (Fig. 7)

- construir el cuadrado (R fi)^2 es decir, hallar el segmento OA, mediante la construcción áurea y trazar un cuadrado con tal segmento como lado.

- Trazar los segmentos OM y AM' para hallar el punto B (no es preciso completar la división del cuadrado en 5 partes ya que **AB** es ya el lado del cuadrado quinta parte).

- Llevar AB al eje horizontal para hallar C: el triángulo rectángulo CAD permite la suma "1 + 1/5 = 6/5", su hipotenusa es el lado del cuadrado buscado.

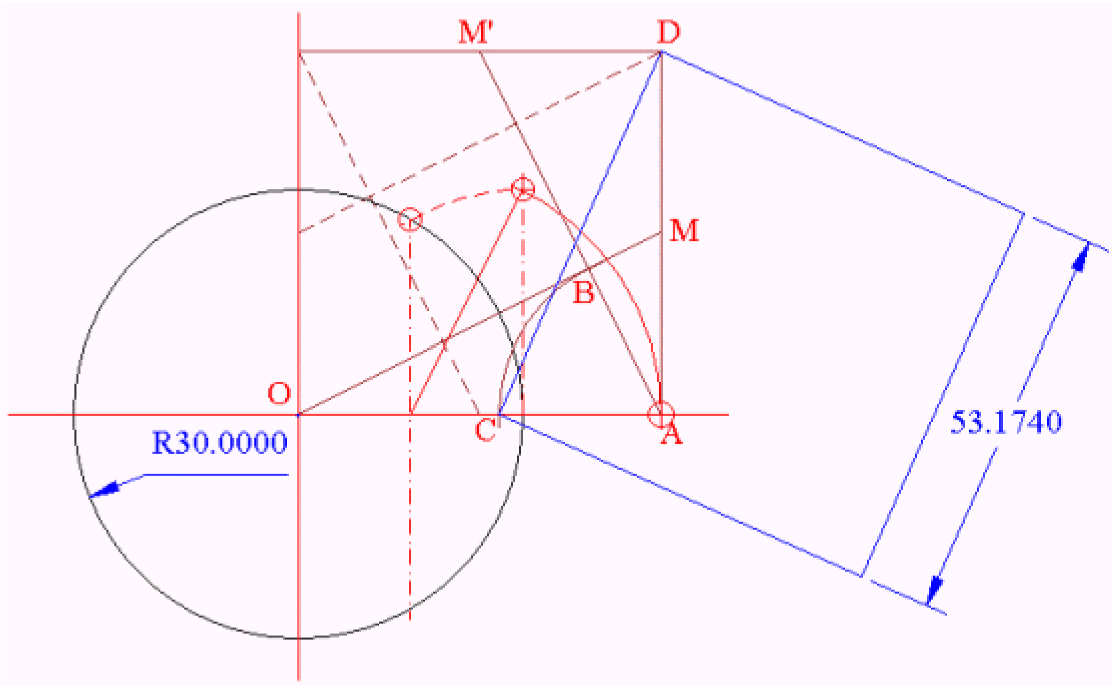



**Fig. 7**

Nota: No estoy seguro que ésta sea la construcción de Hobson aunque está basada en la misma fórmula.

La tercera de las "cuadraturas" relacionadas con la razón áurea comentadas aquí es la descrita por Abelardo Falleti.
Es notable por su excelente aproximación, al tiempo que es de construcción no demasiado complicada.
Sin embargo tal y como la ha descrito su autor sigue el camino inverso: parte de un cuadrado para llegar al círculo.
Para que esta construcción pueda hacerse siguiendo la secuencia radio-dato > lado-solución, es preciso reorganizar la
fórmula original en esta otra:

$$\mathit{area\ circulo} \cong \left( R\,\frac{(\Phi + 1)\cdot 45 \cdot \sqrt{2}}{94} \right)^2$$

Siguiendo esta versión de la fórmula la construcción sería (Fig. 8):

1. Construir la razón áurea de R (segmento AC) y unirlo a R; se obtiene así el segmento OC = R(fi+1).

2. Hallar la mitad del anterior segmento (M).

3. A este segmento mitad restarle 4/94 de él mismo (ver detalle en

Fig.); para ello se toma en una recta auxiliar cualquiera un segmento de 45 unidades (o múltiplo) y otro de 47 (o múltiplo) y a continuación unir el extremo de 47 con el del segmento (R(fi+1))/2, es decir con M, y trazar una paralela por el punto 45 a tal segmento mitad para obtener N. El resultado ON será equivalente a tener R(fi+1)45/94.

4. Con el último segmento obtenido (ON) como radio trazar una circunferencia de centro en el origen de coordenadas (O): los puntos de corte de tal circunferencia con los ejes (P, Q, R y N) son los cuatro vértices del cuadrado buscado.

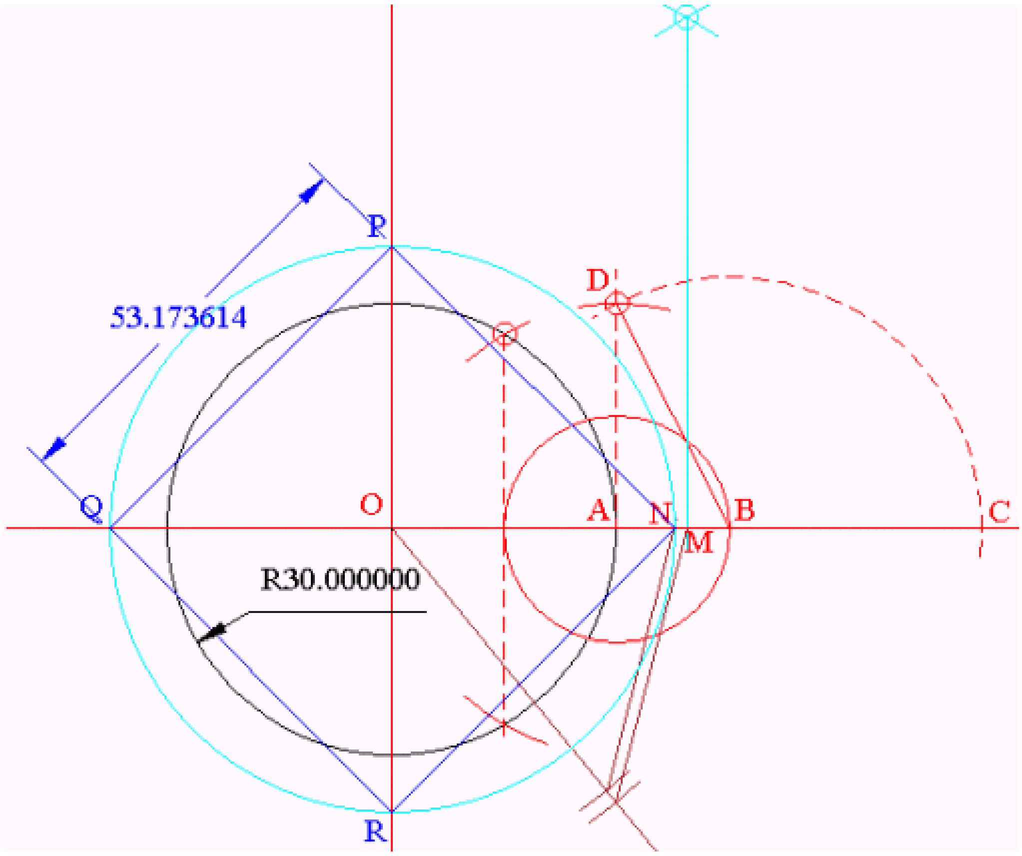



**Fig. 8**

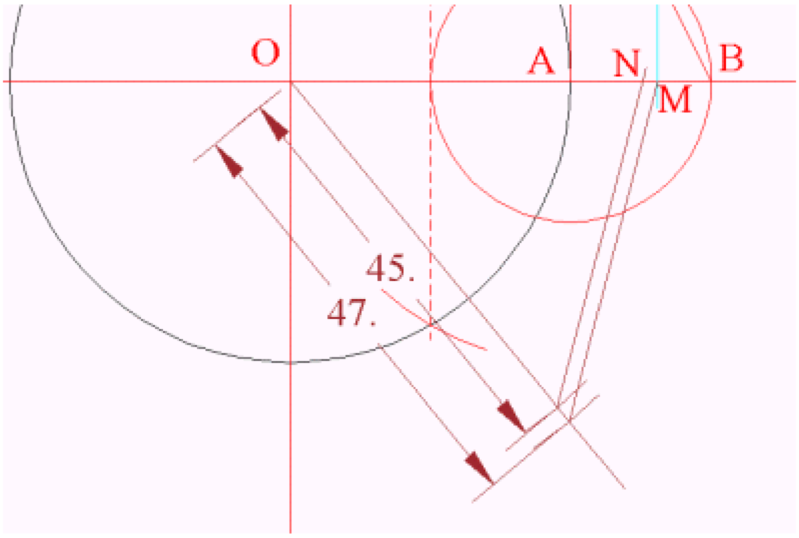



**Fig. 8b (detalle)**

El paso 3 resulta algo farragoso de hacer con regla y compás reales pero con la moderna versión de estos,
un programa de dibujo de tipo CAD, no presenta mayor dificultad. Se trata no obstante de un paso que le
resta algo de "elegancia" a esta construcción (ver mas adelante ).
...
Después de tres fórmulas consecutivas en las que **pi** se relaciona con **fi** permitiendo "cuadraturas"
de aproximación creciente ... ¿existirán otras aún mejores ?, ¿es que solo la magia de **fi** permite
este juego de las cuadraturas?, ¿hay alguna pista para buscarlas?...

...

**Ayudas para los buscadores de cuadraturas.**

Supongamos que con un espíritu parecido al de los aficionados a los crucigramas nos hemos decidido a buscar
cuadraturas... ¿por donde empezar?.

**"Planteamiento"**

Bien, lo primero es plantear el problema en todos sus detalles.

Partimos de un segmento, el radio R y buscamos otro segmento x·R tal que
(x·R)^2 = x^2·R^2 = pi·R^2 por tanto x = raiz(pi).

P.ej. si tomamos x=16/9 entonces (16/9)^2 = 3.1605 es decir aproximadamente pi. Esto da lugar a una construcción sencilla: basta tomar los 16 novenos del radio o, mas sencillo aún los 8 novenos del diámetro para tener el lado del cuadrado (esta es la primera "cuadratura" de la tabla).

Es difícil encontrar fracciones que den una buena aproximación de raiz de pi. Además al elevar tales números al cuadrado
el error relativo a pi se eleva también al cuadrado. Empezamos pues a complicarnos la vida.

**"Nudo"**

Recurrimos a la mas sencilla de las operaciones aritméticas: la suma. Ni que decir tiene que el teorema de Pitágoras nos
da la construcción geométrica de la suma de cuadrados. Así pues, tenemos (a·R)^2 + (b·R)^2 = R^2(a^2 + b^2)
de modo que bastará construir un triángulo rectángulo de catetos a·R y b·R para que su hipotenusa sea el cuadrado que
buscamos y la aproximación de pi usada sería = a^2 + b^2.

P.ej., a= 7/4 y b=9/32 resulta: (7/4)^2 + (9/32)^2 = 3.1416015 es decir pi con un error de apenas 3 ppm..

En el ejemplo anterior los segmentos a y b son sencillos (aunque algo laboriosos) de construir especialmente porque
el divisor es una potencia de 2. Gracias a ello se puede usar la sencilla operación (típica "de regla y compás") de
dividir un segmento por la mitad (ver Fig 9 izda.) iterativamente hasta hallar ¼ o 1/32avo de R.

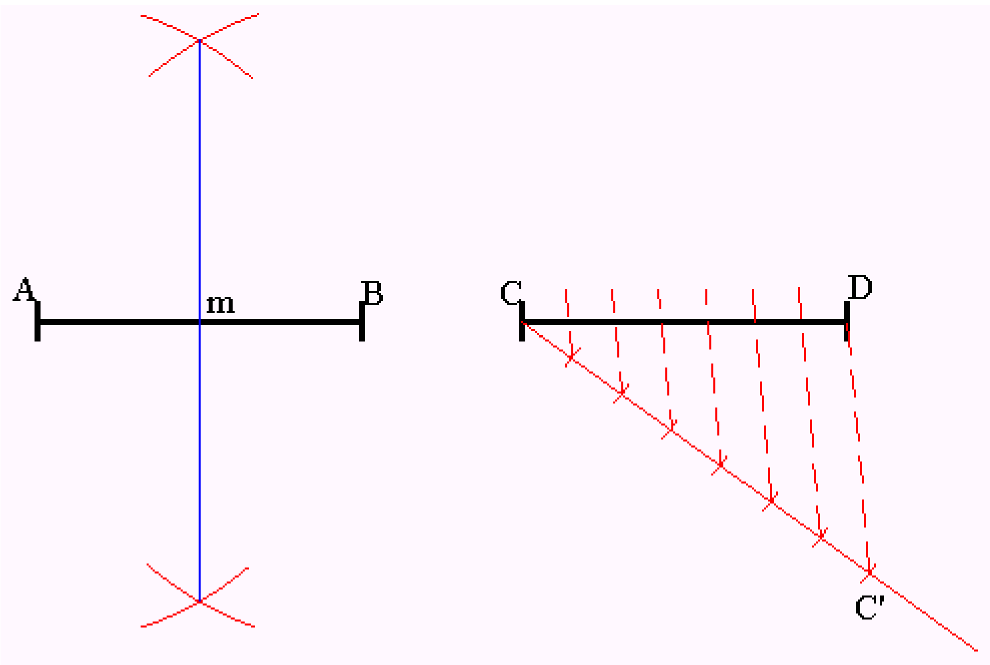



**Fig. 9**

Pero... ¿que pasa si nos planteamos como en la cuadratura de Falleti hallar la fracción 45/47 de un determinado
segmento? ... Para una tal división de un segmento en **n** veces siempre cabe recurrir al

procedimiento general de
la fig. 9 dcha. Pero ... ¿se imagina el lector con un compás real marcando 47 tramos por la recta auxiliar, uno
detrás de otro ...? Si hemos de recurrir a tal sistema estaremos de acuerdo en que la construcción no resulta
"elegante".

El problema de la división de un segmento no es trivial. El lector interesado puede consultar:
**http://www.etheron.net/usuarios/dgomez/sip.htm**
y tal vez aplique tales procedimientos a una brillante cuadratura que me encantaría conocer .

Por supuesto que mi idea de la "elegancia" de una construcción no deja de ser una cuestión de pura estética.
Lo que para el compás resulta latoso para un programa de dibujo no es problema. Y al fin y al cabo el planteamiento
matemático original no se viola en modo alguno

Llegados a este punto ... ¿habrá cuadraturas con buena aproximación y que en un alarde de genialidad no requieran
hallar fracciones de segmento de "muchos" números?...

**Desenlace**
El mejor ejemplo que conozco de lo que yo considero una construcción sencilla, elegante y al tiempo notablemente
aproximada es la que Ramón menciona en la página matriz: la del chino Tsu Ch'ung Chi.

Todavía ignoro si ésta es también la construcción atribuida a Ramanujan en:
**http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html**
ya que ambas se basan el la fracción 355/113.

Se presenta aquí (Fig. 9) tal cuadratura en su versión radio-dato > cuadrado-solución:

1. Trazar tres mediatrices sucesivas en el radio CA para hallar el punto B en 7/8 de CA.

2. Trazar la recta BG y sobre ella llevar la mitad del radio CG para hallar el punto D.

3. Trazar la perpendicular desde D al radio CG para hallar el punto E.

4. Sobre la perpendicular en G llevar M para con ayuda de una circunferencia determinar el punto H. El segmento GH es así igual al MM'.

5. El triángulo rectángulo EGH permite así la suma de cuadrados: EG2 + GH2 = EH2 o, lo que es lo mismo:

$$\left(R\frac{4}{\sqrt{113}}\right)^2+\left(R\sqrt{3}\right)^2=R^2\left(\frac{16}{113}+3\right)=R^2\,\frac{355}{113}\cong \textit{area círculo}$$

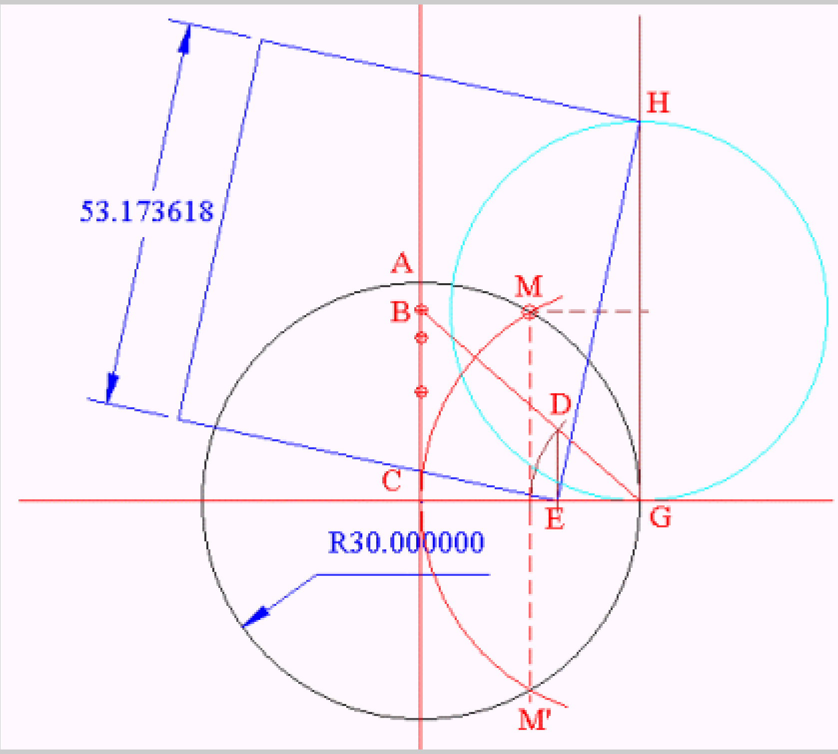



**Fig 10**

¿Qué tiene de especial esta cuadratura?. Pues aparte de lograr una aproximación mejor que la décima de ppm sin echar
mano de números exóticos, la famosa fracción 355/113 posee las siguientes "coincidencias":

- El número primo 113 resulta ser la suma de dos cuadrados perfectos: 113 = 49 + 64 = 7^2 + 8^2 feliz circunstancia
  que permite obtener el segmento raíz de 113.
- Para la operación anterior se ha de partir del segmento 7/8 del radio, partición que, como ya se ha visto resulta
  especialmente fácil gracias a un divisor potencia de 2.
- Cuando a la bendita fracción se le separa su parte entera (el 3) para dejar un fraccionario puro ...
  355/113 = 3 + 16/113 ... resulta que el numerador (16) es un cuadrado perfecto ¡!!

Sin tales coincidencias la cosa resultaría desde luego mas complicada y seguramente no tan "bonita"

En fin, el desenlace de nuestra pequeña comedia " receta para una cuadratura" es un poco triste:...
las bonitas coincidencias, como en la lotería no abundan.
(si algún lector es capaz de cambiar este final...suya será la gloria!!)

**Los números no se rinden**
Vale, nadie dijo que el problema era sencillo. Es mas, desde el principio sabemos que es **imposible**.

Pero, inasequibles al desaliento, nos decimos "¡al diablo con las elegancias!" y dispuestos a sobrellevar
estoicamente cualquier fracción y cualquier división de segmento, nos lanzamos de nuevo a la búsqueda
de mejores aproximaciones de **pi**.

Bien, si hemos de volver a usar una aproximación de pi del tipo: a^2 + b^2, y nos resignamos a que uno
de los sumandos sea una fracción, p.ej. b^2 = (p/q)^2 ¿porqué no empezamos por hacer que, al menos,
a^2 sea sencillo?.

¿qué tal, p.ej., a^2 = 1^2 = 1? ... y voilá:

$$\pi \cong \left(\frac{60}{41}\right)^2 + 1 = \frac{3600}{1681} = 3.1415824\ \ldots$$

con un error e = 3.3 ppm. Ciertamente una aproximación no muy brillante pero de construcción bien sencilla:

1. Sobre uno de los ejes (el horizontal en este caso, fig. 10) duplicar el radio dato OA para tener el mismo radio en AB.

2. Dividir AB por el procedimiento general para obtener el segmento 19/41-avos de modo que el segmento OC = OA + AC = 1 + 19/41 = 60/41 del radio.

3. El triángulo DOC rectángulo en O nos da la suma 1^2 + (60/41)^2 buscada

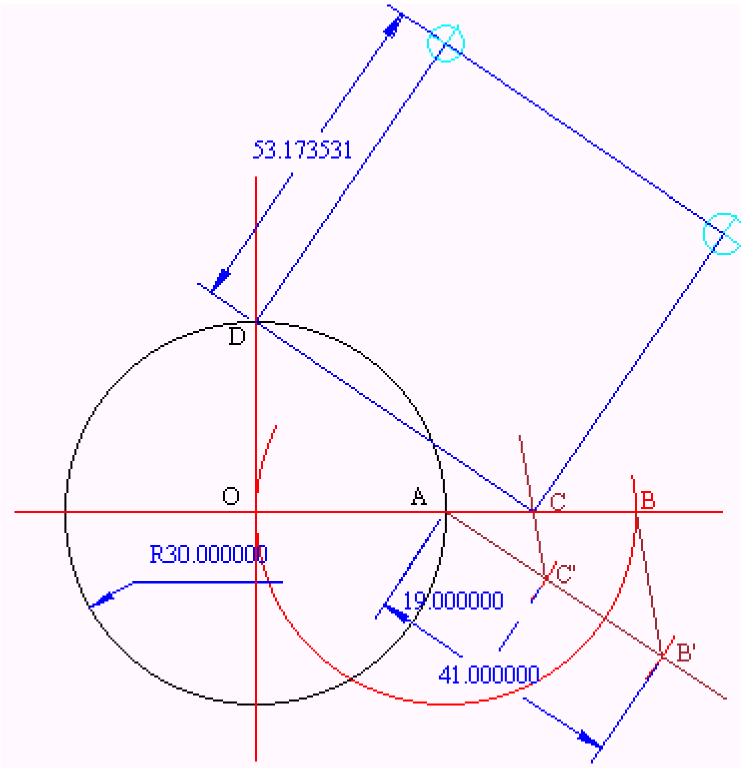



Fig. 10 *A Noelia*

Si en vez de tomar como sumando sencillo el 1 tomamos el 2 o el 3, las construcciones son apenas algo
mas complicadas ya que la construcción de las raíces de 2 o de tres son también fáciles. Con el 3 se
obtiene la mejor aproximación de esta familia:

$$\pi \cong \left(\frac{73}{194}\right)^2 + 3 = \frac{118237}{37636} = 3.1415931\ \ldots$$

(error = 0.16 ppm)
No está mal, considerando lo sencillo de la construcción, pero ...busquemos por otro lado ...

Dejamos hace un rato la cuadratura de A.Falleti como primer ejemplo de construcción donde
tuvimos que hacer uso de la división de un segmento en partes cualesquiera. Por otro lado nos
preguntábamos si el dorado número fi tenía algo realmente especial en este negocio de las
aproximaciones de pi. Bien, he aquí una de las muchas fórmulas aproximadas de pi que usa a fi:

$$\pi \cong \left(\frac{61}{269}\right)^2 + \left(\sqrt{5(\varphi - 1)}\right)^2 = 3.14159267...$$

... que tiene un error menor de 0.006 ppm. Algo mejor que la aproximación de Falleti pero
sin duda mas "fea" Ver la construcción en la figura 11 (no descrita)

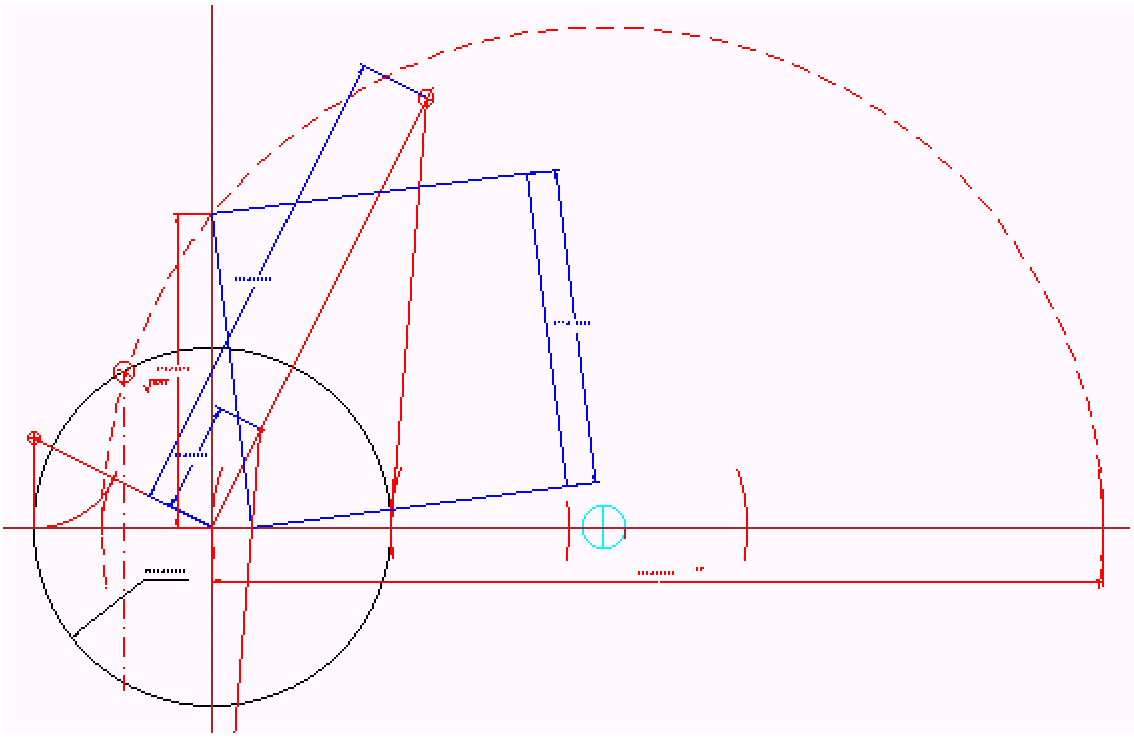


**Fig 11**

A estas alturas el lector ya se habrá percatado de que con el truco de añadir una fracción podemos sacar
aproximaciones de pi de **casi** cualquier parte por lo que nos vemos obligados a concluir, no sin cierta desilusión,
que fi salvo las bonitas fórmulas de Keops y de Hobson, no nos da mucho mas. (¿o si?).

Para rematar la faena veamos un par de ejemplos mas de
**bonito-número-mas-astuta-fracción = otra-aproximación de pi**.

El primero tiene como protagonista al bonito número 1/[raíz(2-raíz(2))] también conocido como razón
cordobesa, que se define como la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular

y el lado de este
(un oficio, como se ve, muy parecido al de fi con el decágono; ver
**http://www.arrakis.es/~mcj/cordoba.htm**)

$$\left(\frac{424}{313}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\left(1+\frac{111}{313}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=3.14159265\ldots$$

... con un error de 0.08 ppm.

Y en el segundo vemos como el "truco" de la "fracción astuta" mejora la venerable aproximación de 22/7

$$\frac{22}{7}+\left(\frac{8}{225}\right)^2=3.141592946..$$

... y la pone al nivel de las de error inferior a 0.1 ppm (0.093).

Y después de todo esto ... ¿hasta donde podemos llegar?

**La milésima de ppm y mas allá**

En nuestra primera tabla el récord de aproximación lo ostenta la fórmula de Ramanujan (cuya construcción por cierto sigo sin encontrar). Se trata de una fórmula sin duda tan especial como su autor: con tres números, 9, 19 y 22, consiguió una aproximación mejor que 1/3 de milésima de ppm.

Ramanujan parece que descubrió esta fórmula y otras semejantes en el curso de sus trabajos sobre ecuaciones modulares.

Si el lector ha llegado hasta aquí le recomiendo encarecidamente que vea las páginas:
**http://numbers.computation.free.fr/Constants/Pi/piApprox.html**
y **http://mathworld.wolfram.com/PiApproximations.html**

En ellas puede encontrar otras aproximaciones debidas al genio de Ramanujan aunque probablemente no tan aptas para una construcción geométrica sencilla (¿?).

Y también puede encontrar como obtener sistemáticamente aproximaciones de **pi** basadas en la teoría de fracciones continuas:

$$\frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ \frac{103993}{33102};\ \frac{104348}{33215};\ \frac{208341}{66317};\ \ldots$$

(en estos casos al menos, las aproximaciones salen de la aplicación de un algoritmo matemático demostrable, no se trata pues, en rigor, de meras coincidencias)

En esta serie están, como no, nuestras viejas conocidas 22/7 y 355/113. Pero lo interesante es que la siguiente fracción a 355/113 tiene ya un numerador con el doble número de dígitos!. Puestos a sobrellevar números tan antipáticos, cojamos la última (de las escritas aquí, se entiende) 208341/66317 = 3.14159265346... con un error menor que 40 ppb (partes por **billón**) ...! magnífico! ...mejor que la de Ramanujan! Pero... ¿como convertir tal fracción en una sencilla (¿?!) construcción geométrica?. Una posibilidad es recurrir una vez mas a Pitágoras y descomponer la fracción en suma de cuadrados:

$$\pi = \left(\sqrt{m}\right)^2 + \left(\sqrt{n}\right)^2 \;;$$

$$si \;\; m = 3 \;\; y \;\; n = \frac{30}{83} \cdot \frac{313}{799}$$

entonces:

$$\pi \cong 3 + \left(\sqrt{\frac{30}{83} \cdot \frac{313}{799}}\right)^2 = 3 + \frac{9390}{66317} = \frac{208341}{66317}$$

Es decir que sacando la parte entera de la fracción y descomponiendo la fraccionaria pura en un producto
podemos reducir los 6 dígitos iniciales a fracciones de tres dígitos algo mas manejables. Algo es algo.
De paso nos hemos preparado la raíz de un producto que como ya vimos permite usar la construcción
que Euclides numeró como proposición 14 de su libro II, y que ya usamos en la cuadratura de Keops.

A partir de aquí el juego queda en las manos del lector. Números especiales como fi o la razón cordobesa,
fracciones mas o menos afortunadas, aproximaciones geniales al estilo Ramanujan, ... Estoy convencido
de que el tema es inagotable.

**El Arte y las cuadraturas**
Y si nos hemos aburrido de tanta coincidencia mas o menos árida siempre nos queda mirar hacia el mundo
del arte (aquí recomiendo visitar
**http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit1/INTRO.html**
... especialmente las unidades 2 y 7.

Un amable lector (C.Calvimontes) me ha enviado esta referencia

**http://www.urbtecto.com/**

donde se estudia a fondo **una de las "cuadraturas" mas famosas del arte (probablemente la mas conocida de todas) la del hombre de Vitrubio de Leonardo Da Vinci.** Además el autor propone otra de su propia cosecha Se recomienda encarecidamente su estudio .. y disfrute.

Y además, si el tema interesa, también recomiendo **mi otra colaboración**, como complemento al trabajo de C.Calvimontes.

**Nota aclaratoria**
Como se ha visto, el problema de la cuadratura del círculo radica básicamente en la construcción geométrica de la raíz de **pi**.

Un problema parejo es el de construir a **pi** mismo y el propio Ramón nos da dos magníficos ejemplos: el del chino Tsu Ch'ung Chi y la de Hobbes.

Nótese que al construir a **pi** se está, de forma directa, calculando la longitud de la circunferencia.
Técnicamente hallar tal longitud se denomina "rectificar" la circunferencia.

De todos modos, tan transcendente es **pi** como su raíz y por tanto tan imposible es la cuadratura del círculo como la rectificación de la circunferencia. Y así ya que ambos problemas son prácticamente el mismo el rótulo cuadratura del círculo se usa en ambos sin distinción.

**Invitación final**
Se invita a los lectores a buscar construcciones que reúnan las condiciones indicadas: mejor aproximación de pi, construcción sencilla, "elegante" y completa, desde el radio de partida hasta el cuadrado solución.

Aparte de su propia satisfacción las incluiré en la lista para mayor gloria del autor.
(No es gran cosa, ya lo sé, pero es todo lo que puedo ofrecer)

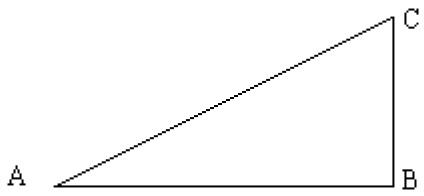
Carlos Martín Piera/ Madrid / 8/03/2002
e-mail: **isaalv@terra.es**

## SIGNIFICADO DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO
by **Abelardo Falletti**

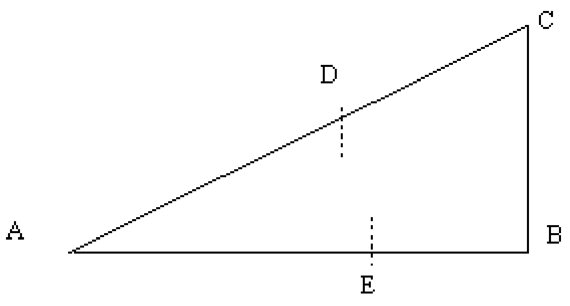
---

Capítulo I

La cuadratura del círculo  tiene un significado directamente relacionado con las leyes de la Naturaleza y como consecuencia de ello con el Hombre Integro, es decir cuerpo-psicología.
Por tal causa un círculo puede ser cuadrado matemática y geométricamente mediante la proporción áurea (reproducción desí mismo, como eje de la continuidad en la Naturaleza) y un Pi de ocho dígitos porque el cerebro humano crea formas en base a una ley de octavas.
La demostración correspondiente a la reproducción de sí mismo dentro de la Unitotalidad Orgánica que es la Naturaleza, que en tal caso de manifiesta como una Unidad, se basa en la ya conocida División Aurea. Esta División Aurea es una unidad geométrica-matemática que de un modo excepcional ha sido capturada como expresión realizada por la mente-cerebro para manifestar su propio funcionamiento de auto-proyección. Dicha unidad geométrica-matemática de reproducción por unión de mitades es algo triangular y se expresa del siguiente modo:




Este triángulo cumple con las proporciones requeridas para tener en él la posibilidad de determinar una proporción áurea y que indican que uno de los catetos debe medir la mitad del otro.
Así, en el ejemplo AB mide 6 cm y BC 3 cm. Pero para obtener los valores unitarios de la proporción áurea se reducirán esas medidas del siguiente modo:
AB = 1
BC = 0,5
Es decir la Unidad y su mitad exacta.
El procedimiento a continuación radica en cortar la hipotenusa desde el punto C con la medida del cateto menor  BC. Ese punto del corte tendrá la letra D.
Luego se traslada la medida AD al cateto mayor AB cortándolo en el punto E :




Para obtener el valor de la hipotenusa se utiliza el Teorema de Pitágoras:

= 1,118033989... (Valor de la hipotenusa)

Como consecuencia de ello la recta AD tiene el siguiente valor:

1,118033989... - 0,5 (valor a BC) = 0,618033989...

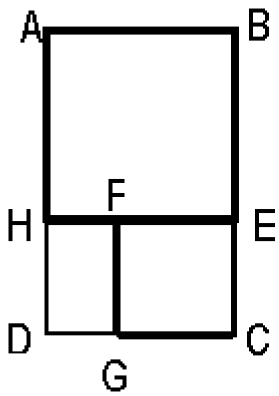
Y al bajar esa medida al cateto mayor éste queda dividido en dos fragmentos cuyos valores son:

0,618033989...
0,381966011...

Y cuya suma es naturalmente 1 (uno), la medida de la recta AB.
La característica de estos dos números irracionales es la reproducción a través del cuadrado como potencia o radicalización:

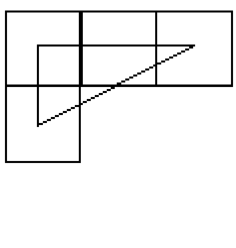
A) el cuadrado de 0,618033988... es igual a 0,381966011...
B) la raíz cuadrada de 0,381966011... es igual a 0,618033988...
C) 0,6180033988... dividido 0,381966011... es igual a 1,618033988...
D) el cuadrado de 1,618033988... es igual a 2,618033988...

Eso en cuanto al aspecto matemático. Pero también ocurre lo mismo en el territorio de la geometría.
El ejemplo muestra un rectángulo cuyos lados guardan la proporción áurea ya descripta:

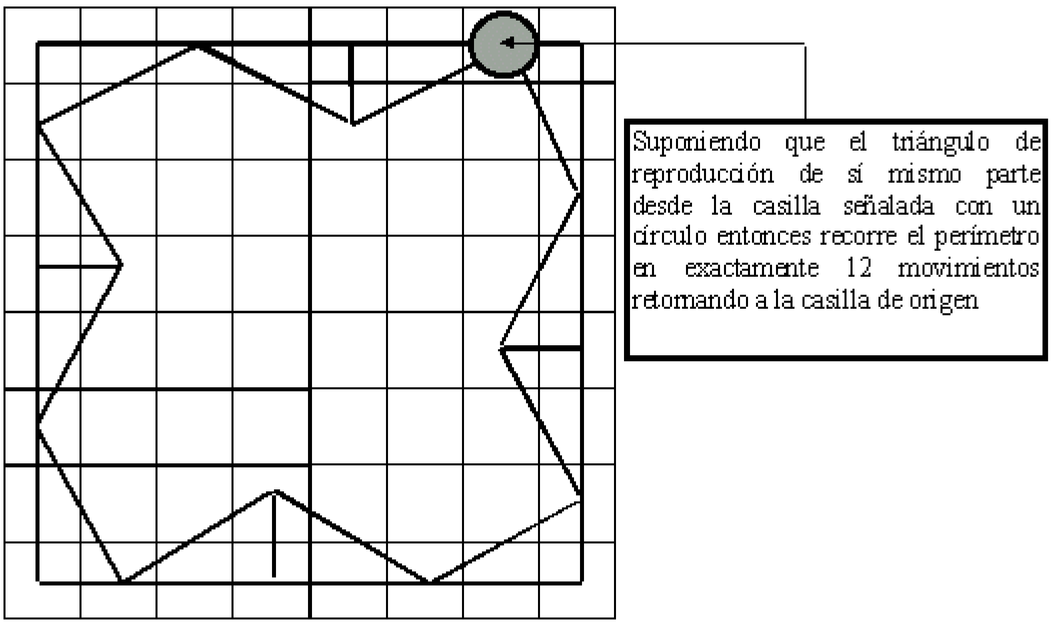



En el rectángulo original ABCD la relación áurea es la siguiente:

El cuadrado ABHE reproduce el rectángulo original en el rectángulo HECD. El cuadrado FECG reproduce el rectángulo original en el rectángulo HFGD, y así sucesivamente hacia arriba y hacia abajo.
Es decir que geométricamente este rectángulo se reproduce a sí mismo tanto hacia lo más chico como hacia lo más grande, tanto hacia arriba como hacia abajo. “Arriba” y “Abajo” implica a la Unidad reproduciéndose a sí misma proyectada en todas partes y en cada cosa.
Desde la antigüedad, cuando se planteó el problema de la cuadratura del círculo, conocían -como es obvio- la solución del mismo. Esto no es una idea, sino un hecho que queda demostrado en el juego del ajedrez cuyo origen es realmente desconocido.
En dicho juego, el movimiento del caballo es un triángulo áureo tal como se muestraen el gráfico siguiente:



Las piezas en el juego de ajedrez se ubican en el centro de la casilla y tomando las medidas de centro a centro queda configurado el triángulo áureo en que un cateto mide 2 y el otro 1, que son las medidas que exige la proporción áurea.
Lo notable es que el tablero de ajedrez es un cuadrado de ocho casillas por lado, y este movimiento del triángulo áureo o de reproducción de sí mismo recorre el perímetro de un modo circular recurrente en 12 pasos o movimientos tal como se muestra a continuación:




---

Capítulo 2

**PI MATEMATICO OBTENIDO**
**POR RADICALIZACIONES SUCESIVAS**
**CON RESULTADO PREDETERMINADO E INALTERABLE**

Como es sabido existe una regla matemáticas que indica que en las operaciones de suma si se altera un factor automáticamente se altera el resultado. Sin embargo existe una excepción cuando la suma es realizada mediante una radicalización sucesiva en que uno de los factores puede ser antojadizamente alterado sin modificar el resultado. Con el agregado de que, por ejemplo, el resultado Pi con decimales matemáticos exactos puede ser predeterminado antes de realizar la operación.
La fórmula es la siguiente:

r = resultado
z = r ( r - 1 )
x = número a elección

Ejemplo:

a)

r = Pi
z = Pi ( P1 -1 ) = 6,728011748...
x=  17,35549976...

b)

x= 56

Y este hecho matemático funciona cualquiera sea el resultado que se desee obtener, al margen de Pi.
Pero en relación con Pi significa que Pi opera dentro de esta fórmula como cualquier otro número, lo que estaría indicando que no es tan trascendente como se piensa, y que su larga serie de decimales obtenidos mediante fórmulas matemáticas es un infinita tendencia al cero absoluto.
Un cero absoluto que en las demás disciplinas científicas se considera ausencia de movimiento, ausencia de existencia.

---

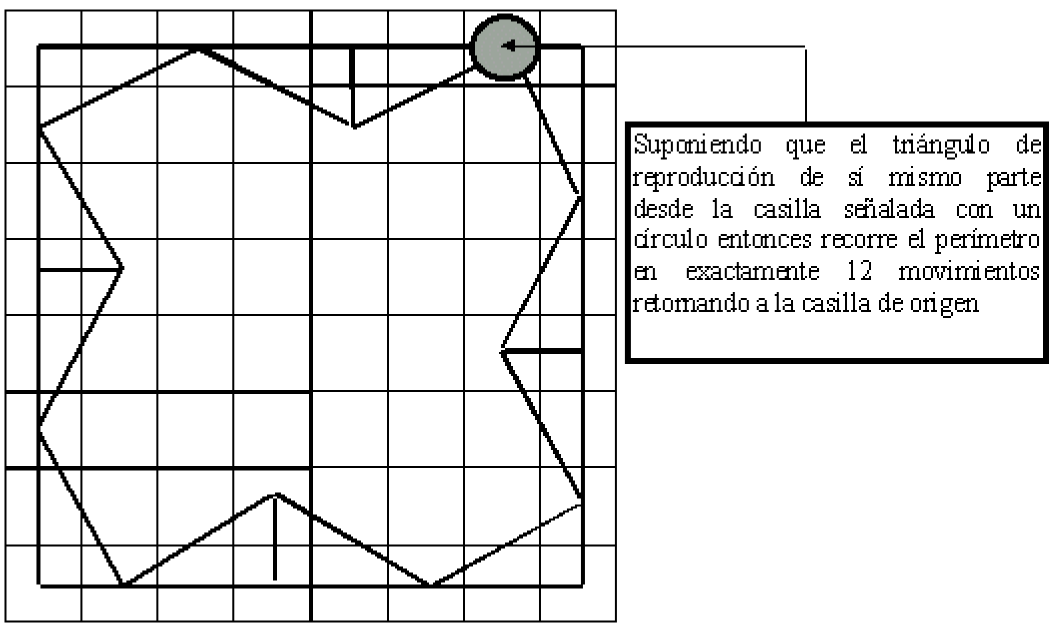
## Capítulo 3

## LA HEPTARECURRENCIA

**EN LOS DECIMALES DE PI**

Encontrar en la serie de decimales de Pi un sistema recurrente en la estructura de los mismos ha sido y es el sueño de todo investigador en este tema.

Para comenzar en esa indagación hay que regresar al Capítulo 1, de esta serie de comentarios. Allí se expuso al finalizar dicho capítulo el siguiente gráfico:




Este es el recorrido circular y recurrente del triángulo aúreo o de reproducción de sí mismo utilizando el perímetro del cuadrado de 8.

Este perímetro consta de 28 casillas, y el recorrido del mismo por parte del triángulo áureo constituye un cuadrado de 7 dentro del cuadrado de 8.

Este número 7 tiene una relación directa con el círculo recurrente cuando se lo relaciona con los demás números que van del 1 al 9:

1 / 7 = 0,142857 142857 ...

2 / 7 = 0,285714 285714 ...

3 / 7 = 0,428571 428571 ...

4 / 7 = 0,571428 571428 ...

5 / 7 = 0,714285 714285 ...

6 / 7 = 0,857142 857142 ...

8 / 7 = 1,142857 142857 ...

9 / 7 = 1,285714 285714 ...

Como puede observarse existe un círculo numérico giratorio recurrente constituido por seis números 142857, en los que faltan el número 3 y sus múltiplos 6 y 9.

El primer resultado obvio que surge de esta indagación es fragmentar los decimales de Pi de siete en siete:

3, 1415926 / 5358979 / 3238462 / 6433832 / 7950288 / ...

Suma de guarismos

Ahora puede observarse que el primer fragmento de 7 decimales suma 28, es decir que es coincidente con el gráfico del cuadrado de 8 con el recorrido circular recurrente del triángulo áureo utilizando 28 casillas y constituyendo un cuadrado de 7 dentro del mismo.

Este primer fragmento con suma 28 ( cuatro lados de 7 del cuadrado interior ) se constituye en la clave que será el eje de la recurrencia circular y giratoria en los decimales de Pi, sea cual sea la cantidad de decimales que se obtengan. El segundo fragmento suma 46 y puesto en relación con la clave 28:

46 / 28 = 1,64 **285714 285714 ... (recurrencia giratoria)**

Lo notable radica en los tres primeros números de la serie, es decir 164, que son ajenos a la recurrencia, tienen la siguiente relación con los números faltantes en la recurrencia 142857, es decir 369:

$$\frac{\frac{164}{369}}{10} + 1 = 1{,}0444444\ldots$$

Este resultado es la medida de la recta que resuelve la cuadratura del círculo con un Pi de 7 decimales pertenecientes a este primer fragmento.

Prosiguiendo con los demás fragmentos de los decimales, el tercero es nuevamente 28, es decir es uno y el mismo que la clave del sistema de recurrencia.

El cuarto fragmento suma 29:

29 / 28 = 1,03 **571428 571428 ... (recurrencia giratoria)**

El quinto fragmento suma 39:

39 / 28 = 1,29 **285714 185714 ... (recurrencia giratoria)**

Y así sucesivamente hasta donde se obtengan decimales.

A quien le interese verificarlo en los hechos puede crear un programa para instalarlo en la computadora. Para ello deberá tener previsto lo siguiente:

a) todas las sumas de guarismos que arrojen cifras que no son múltiplos de 7, funcionan a la perfección con los ejemplos anteriores.

b) las sumas que pueden ser múltiplos de 7 constituyen un conjunto unitario que demuestra la reproducción áurea oculta en estas reproducciones. Estas sumas posibles serán 14, 21, 35 y 42, dejando al 49 separado por una razón que se explicará en el punto siguiente.

Este conjunto de cuatro sumas se relacionan del siguiente modo:

$\sqrt{\frac{35}{28}} = 1{,}118033988\ldots(a)$ (hipotenusa del triángulo áureo)

$\frac{42}{28} = 1{,}5(b)$

(b) - (a) = 0,381966011...(**segmento menor de la proporción áurea)**

$\frac{14}{28} = 0{,}5(d)$

(a) - (d) = 0,618033988... (**segmento mayor de la proporción áurea**)

$\frac{21}{28} = 0{,}75(c)$

$\sqrt{(b) + (c)} = (b)$ **(reproducción de (b))**

c) En cuanto a la suma de guarismos 49 que pudiera resultar, se trata del cuadrado de 7, y tiene que tener una relación invertida con la clave 28:

$$\frac{28}{49} = 0{,}571428571428\ldots$$

Esta periodicidad (142857) que surge de los decimales de Pi está directamente relacionada con el círculo cromático, la tetractys de Pitágoras, y la música, entre otras cosas y permite señalar muy concretamente el misterio del hombre mediante la geometría, la matemática, la música y los colores.

Se trata de algo científico y a la vez artístico y por consiguiente estético.

Será la médula del capítulo siguiente.

(Para estos comentarios se han tomado elementos básicos contenidos en los siguientes libros: "El Hombre que no es", de Aymará, edición 1996, ISBN 950-43-7751-3; "El Maestro Desconocido de la Gran Pirámide", de Abelardo Falletti, edición 2000, ISBN 987-43-2367-8; "Números con cinco cuerpos", Falletti y Dettoni, edición 2000, ISBN 987-43-2355-8; "La sombra recta del factor Pi", de Abelardo Falletti, edición 1999, ISBN 987-43-0700-5; "Cuadratura del Círculo, misterio revelado", de Abelardo Falletti, edición 1995, ISBN 950-43-6154-4).

## Capítulo 3

## (Adicional)

Para verificar la armónica relación de esta periodicidad en los decimales de Pi con lo descrito en los capítulos anteriores, se toman los primeros 13 fragmentos de siete decimales según los obtiene el sistema matemático en uso:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1415926<br>**28** | 5358979<br>**46** | 3238462<br>**28** | 6433832<br>**29** | 7950288<br>**39** |
| 4197169<br>**37** | 3993751<br>**37** | 0582097<br>**31** | 4944592<br>**37** | 3078164<br>**29** |
| 0628620<br>**24** | 8998628<br>**50** | 0348253<br>**25** | | |

En el primer fragmento, además de la sumatoria 28, sucede que la multiplicación de sus decimales arroja el siguiente resultado:

1 * 4 * 1 * 5 * 9 * 2 * 6 = 2160

Se trata de un resultado que tiene una relación matemática directa con la recurrencia circular que se está poniendo de manifiesto, ya que multiplicado por 12 es igual a 25920, es decir la cantidad de años del círculo de precesión de los equinoccios.

De modo que los 12 primeros fragmentos considerados no sólo representan las 12 divisiones de 30 grados del ciclo de precesión sino que además representan cada uno de los 12 pasos o movimientos del triángulo áureo constituyendo un círculo recurrente en las 28 casillas del perímetro del cuadrado de 8, tal como ya se ha comentado.

Y el último fragmento, el 13, está tomado para indicar la posibilidad de quebrar esa recurrencia áurea pasándola a otro círculo potenciado o elevado.

Esta serie de fragmentos de siete decimales queda visualizada en el siguiente cuadro:

| **Fragmento** | **Sumatoria** | **Recurrencia** |
|---|---|---|
| 01 | 28 | 1 |
| 02 | 46 | 1,64 285714 285714. |
| 03 | 28 | 1 |
| 04 | 29 | 1,03 571428 571428. |
| 05 | 39 | 1,39 285714 285714. |
| 06 | 37 | 1,32 142857 142857. |
| 07 | 37 | 1,32 142857 142857. |
| 08 | 31 | 1,10 714285 714285. |
| 09 | 37 | 1,32 142857 142857. |
| 10 | 29 | 1,03 571428 571428. |
| 11 | 24 | 0,85 714285 714285. |
| 12 | 50 | 1,78 571428 571428 |
| **SUBTOTALES** | ---> | **12,78 4,142857 142857... sin el 1 del 28** |
| 13 | 25 | 0,89 285714 285714... |
| **TOTAL** | | **4,428571** |

| | | |
|---|---|---|
| | | **428571** |

Lo que primeramente se observa es que en el subtotal de los 12 primeros fragmentos los números 12 y 78 están íntimamente relacionados por que 78 es precisamente la sumatoria de 12, y si ambos números son multiplicados entre sí el resultado es 936 (los números faltantes 369, en la recurrencia periódica, que se encuentran expresados de un modo invertido).

Este resultado 936 no es algo arbitrariamente desprendido y sin contacto con esta tabla, porque dividiéndolo por 28 (la clave de la tabla) arroja el siguiente resultado:

$$\frac{936}{28} = 33{,}428571428571...$$

Un resultado cuyos decimales periódicos coinciden exactamente con los decimales de la suma total 4,428571 428571...

Y por otro lado el entero 33 multiplicado por 28 conduce a los 924 mts. del perímetro del cuadrado de la base de Keops que todos los investigadores reconocen como circular porque han detectado el factor Pi en las proporciones de la Gran Pirámide.

Surge algo notable si se obtiene la diferencia entre el número 936 con el 369 faltante en la periodicidad:

936 - 369 = 567

El resultado es la suma de las medidas en metros y exteriores de Keops:

147 mts. altura.

189 mts. arista.

---

231 mts. lado base

567 total.

Demasiada coincidencia para negar rotundamente la presencia de una intencionalidad en la construcción y el conocimiento desde el cual fue realizada.

Esas tres medidas son múltiplas de 7, y tienen el número periódico como puente entre sus relaciones:

$$\frac{231}{147} = 1{,}5714285714 28... \quad \frac{189}{147} = 1{,}285715285714...$$

Es también una extrema "coincidencia" que el matemático griego Arquímedes le diera a Pi el valor de $3+\frac{1}{7}$, es decir 3,142857 142857 142857...

En 1882 el matemático alemán Ferdinand Lindemann demostró que "Pi" es un número trascendente, esto es, no puede ser la raíz de una ecuación polinómica con coeficientes racionales, y de esta manera llegó a demostrar la imposibilidad de la cuadratura del círculo, pero no fue absoluto y lo condicionó específicamente agregándole "mediante álgebra o usando la regla y el compás". De modo tal que no afirmó que fuera de estas condiciones específicas la cuadratura del círculo resultara posible.

Esta puerta abierta, que dejó el matemático alemán, es una demostración de que "matemáticas es el estudio de las **relaciones** entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para **deducir** cantidades, magnitudes y propiedades **desconocidas**" (Enciclopedia Encarta 2000) y se agrega: "hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la **ciencia de las relaciones**, o como la ciencia **que produce condiciones necesarias**".

Regresando ahora a los fragmentos de 7 decimales de Pi, en estos 13 fragmentos aparece el número 28 en dos oportunidades que dividido por sí mismo, siguiendo el sistema del procedimiento propuesto, arroja como resultado la unidad. Y además la recurrencia periódica consta de 6 dígitos. ¿Podría este hecho conducir matemáticamente a un Pi de 6 dígitos?

He aquí la fórmula:

$$3{,}14159... = 2^{10} * \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{1+1}}}}}}}}}}$$

La multiplicación por 2 a la potencia 10 se debe a la cantidad de radicalizaciones sucesivas, es decir diez.

¿Y podrían ahora estos hechos matemáticos conducir a la proporción áurea?

La fórmula es la siguiente:

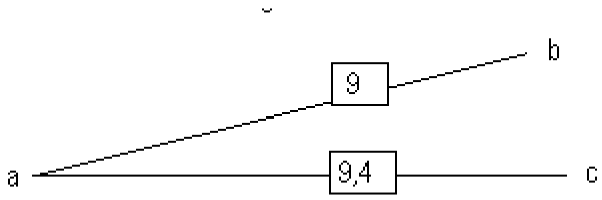
$$1{,}618033988... = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{3{,}14159...}}}}}}}}}}$$

Aprovechando los condicionamientos que indicó el matemático alemán Ferdinand Lindemann y saliéndonos de los mismos, la cuadratura del círculo es posible.

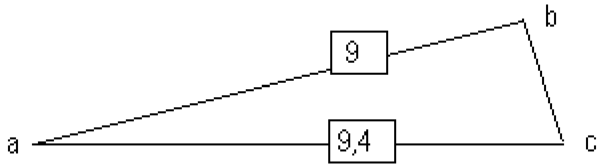
La demostración geométrica de la cuadratura del círculo ahora es posible obteniendo la siguiente recta:

9,4 ./. 9 = 1,044444444...

que geométricamente se obtiene del siguiente modo:




Se divide la recta "ab" en 9 partes iguales. Luego se une el punto "b" con el punto "c":

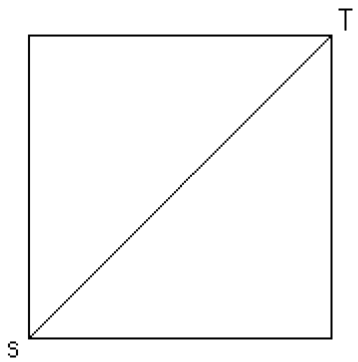



Seguidamente desde los 8 puntos divisorios dentro de la recta "ab" se trazan paralelas a la recta "bc", de modo tal que cada uno de los 9 fragmentos que se producen en la recta "ac" miden 1,0444444...

Practicando geométrica la división áurea sobre esta recta con un triángulo cuyos catetos sean 1,0444444... y su mitad, el segmento áureo menor mide:

$$1{,}0444444... \times 0{,}381966011 = 0{,}398942278... \text{ (d)}$$

Ahora se construye un cuadrado con lado (d) y se traza su diagonal:




La diagonal ST mide:

$$(d)\sqrt{2} = 0{,}56418958\ldots \text{ (e)}$$

Finalmente y con la recta (e) como radio se traza un círculo cuya área será:

$$(e)^2 * Pi = 0{,}9999999$$

Es decir UNO hasta 8 dígitos UNICAMENTE, con lo cual **se cuadra el área de un círculo con un cuadrado de lado uno** mediante un factor Pi de 8 dígitos: 3,1415926, es decir con siete decimales.

De modo tal que el área 1 del círculo queda cuadrada con el área de un cuadrado de 1 por lado.

No se trata de una cuadratura del círculo obtenida "mediante álgebra o usando la regla y el compás", sino utilizando matemáticas de un modo complementario con la geometría, sin necesidad de estar midiendo a farolazos limpios con la regla y el compás.

Y se llega a este resultado con un círculo de área UNO que se cuadra con el área de un cuadrado cuyos lados miden la unidad.

Las razones por las cuales el Pi que origina esta cuadratura es de siete decimales y sin aproximación alguna sino con precisión científica (sin fragmentar a las matemáticas de las diferentes disciplinas científicas), surgirán al completar el desarrollo del significado de la cuadratura.

En mi Comprensión, y puedo estar equivocado, sería una cosa muy triste que la matemática, desde un punto de vista filosófico, se transformara en una "huerta" dividida, separada, de las demás disciplinas científicas y se olvidara del Hombre.

---

## Capítulo 4

Este capítulo está dedicado a plantear la relatividad que existe en cuanto a la gran cantidad de decimales de Pi que se obtienen matemáticamente más allá de 7 decimales.

Las razones por las cuales el límite de decimales exactos es de siete números estarán expuestas en los capítulos siguientes. Mientras tanto se comentarán los dos aspectos fundamentales que se utilizan en la obtención relativamente "infinita" de decimales de Pi desde el punto de vista matemático.

Uno de esos aspectos, es el de imaginar la circunferencia con un polígono de "n" lados, cosa que está brillantemente "mostrada" en esta página por Mario Peral Manzo, de México, en "El cuadrado Analógico (Hipercuadrado)", de la Universidad Pedagógica Nacional (Unidad 152, Atizapán), donde se dice: "que es un error considerar a la curva cerrada simple (llamada circunferencia) del círculo como un polígono regular con un número infinito de lados".

Si el uso del polígono es erróneo, entonces los "infinitos" decimales obtenidos de Pi matemáticamente no son absolutamente exactos, sino relativos. Y tampoco puede ser exacto un resultado numérico obtenido por una infinita tendencia al cero, es decir a la ausencia de número.

Afirmar que el cero implica ausencia de número no es aceptado por la ciencia matemática, pero para demostrar la cuadratura del círculo es un asunto que no se puede dejar alegremente de lado, máxime teniendo en cuenta que los "infinitos" decimales de Pi se obtienen mediante cálculos que utilizan el "cero" como si se tratara de un número.

Para continuar con el significado de la cuadratura del círculo es imprescindible poner en claro esta cuestión del "cero".

A tales efectos se pone a consideración las razones que sustentan un Pi con 7 decimales (sin la presencia del cero) contenida en la cuadratura del círculo.

## LOS NUMEROS Y EL CERO

Número, en matemáticas, es un símbolo utilizado para designar **cantidades** o entidades que se comporten como tales.

Y a su vez matemáticas significa el estudio de las relaciones entre **cantidades**, magnitudes y propiedades, como así también de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades **desconocidas.**

Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la **ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias.**

Los números naturales son:

1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Estos números naturales son los primeros números que surgen sin diferencia alguna en las distintas civilizaciones. Es una cosa muy sugestiva porque podría estar indicando que se trata de una estructura genética en el hombre, mientras que los números posteriores al 9 aparecen como sistemas convencionales de lo más diversos hasta concluir con la adopción del sistema decimal.

Sin embargo en la actualidad dichos números naturales suelen **iniciarse** matemáticamente con "Cero", y continúa la serie más allá del 9 de un modo relativamente infinito a partir del 10.

Se trata de una convención dentro de la especialidad científica de las matemáticas para facilitar el sistema de contar y **permitir su notación posicional**.

Por lo tanto el cero no es un número porque por sí mismo no designa cantidades, sino que permite convencionalmente que los números combinados con el cero puedan facilitar los cálculos que designan cantidades mayores a 9.

De lo contrario, los dedos de la mano tendrían que comenzar a contarse desde el "cero" y la suma de los dedos de una mano daría "cuatro". Obviamente se trata de una contradicción en relación con la natural forma de contar que tiene el ser humano.

El símbolo del cero permite aumentar o disminuir el valor del círculo numérico 1 al 9, y mezclado con ellos los posiciona de un modo tal que perfecciona el sistema de cálculos.

Se trata de una convención planetaria unívoca, y por lo tanto las relaciones a que se refiere la definición de las matemáticas son posibles de descodificar en cualquier rincón del planeta, y por cualquier persona humana, con el mismo significado. Este es un logro que no han alcanzado las otras disciplinas científicas cuyas convenciones para establecer un lenguaje unívoco sólo se aplican dentro de cada especialidad.

En la edad media existían seis grupos culturales bien diferenciados, que pueden clasificarse como Occidente latino, Oriente bizantino, China, India, la civilización musulmana, y la civilización Maya.

Fueron los mayas quienes descubrieron la utilidad de incorporar un símbolo llamado "cero" para perfeccionar el sistema de contar que necesitaban para sus cálculos astronómicos.

Esta incorporación de la civilización Maya derivó en el sistema corriente de notación numérica que es utilizado actualmente en casi todo el mundo sobre la base de la numeración arábiga. La innovación aportada por el sistema arábigo fue el uso de la notación posicional, mediante la cual los nueve símbolos numéricos cambian su valor según la posición que ocupen en la cifra escrita.

Esta notación posicional no es posible sin la presencia de un símbolo, no numérico y a este solo efecto, denominado "cero", se le otorgue el símbolo y el nombre que se quiera.

Ese símbolo "cero", por sí mismo, permite distinguir entre 35, 305, 3500, 3005, por ejemplo, sin necesidad de utilizar símbolos adicionales, simplificando de tal modo cualquier tipo de cálculo numérico por escrito o notación. Y el hábito hizo lo demás, porque se han establecido relaciones habituales entre las diferentes notaciones que permiten darle a cada una de ellas el significado correspondiente.

Es algo similar a lo que ocurre con las notaciones musicales para los músicos, con la salvedad de que estas notaciones no son conocidas ni habituales por todos los habitantes del planeta durante centurias como ha ocurrido y ocurre con el sistema decimal y sus notaciones, además de ser colectivamente instruidos convenientemente en la educación primaria sobre las bases del sistema.

El "cero" no sólo significa vacío, ausencia de número, sino que si se imagina a un nadador que salta desde un bote inmóvil flotando en el agua puede encontrarse ese mismo significado. Antes de saltar el nadador y el bote carecen de movimiento, motivo por el cual el momento lineal es "cero", es decir nulo. Al saltar, el nadador adquiere momento lineal hacia adelante de él y al mismo tiempo el bote se mueve hacia atrás con un momento igual en magnitud y dirección pero en sentido contrario. Esto significa que el momento total del sistema formado por el nadador y el bote sigue siendo "cero", es decir ausencia de momento lineal.

La conservación del momento lineal se cumple en la teoría cuántica, al describir los fenómenos atómicos y nucleares, como así también en la relatividad cuando los sistemas se desplazan a velocidades próximas a la de la luz.

El **concepto** de cero absoluto también es importante desde el punto de vista teórico. Según la tercera ley de la termodinámica, la entropía de un cristal puro sería nula en el cero absoluto. Esto tiene una destacada importancia en las reacciones químicas y en la física cuántica, porque los materiales tienen propiedades muy extrañas cuando se enfrían a temperaturas muy bajas. Por ejemplo, algunos pierden por completo su resistencia eléctrica, tal como se pudo observar en el mercurio a unos pocos grados por encima del concepto del cero absoluto.

En teoría, las moléculas de una sustancia no presentan actividad traslacional alguna a la temperatura conceptual de cero absoluto.

En el sistema binario que utilizan los ordenadores con el sistema de interruptores la posición de encendido corresponde convencionalmente al uno, y el "apagado" al cero. También se pueden usar puntos imantados en una cinta magnética o disco, en el que un punto imantado representa al dígito 1, y la **ausencia** de un punto imantado es el dígito "cero".

Es decir, el "cero" implica siempre "ausencia". Y matemáticamente significa "vacío de cantidad", "ausencia de número", siendo al mismo tiempo un "cero absoluto" porque en sí mismo no es positivo ni negativo.

Tan sólo conceptualmente se lo puede llegar a considerar como "cero negativo" y "cero positivo", dependiendo ello de la dirección operativa con la cual se llega al cero, según estos ejemplos:

$$+ 15 - 9 - 6 = + 0$$

$$- 15 + 9 + 6 = - 0$$

Se trata de un concepto, porque el cero entrará en la operatoria matemática sin cambio alguno se trate de una dirección de llegada al mismo en sentido positivo o negativo.

El Cero está definido en matemáticas como el representante de un conjunto vacío cuyo símbolo es el cero. La división por cero no está definida y es por lo tanto es una operación prohibida.

La razón es la siguiente:

$$\frac{12}{0} = ?$$

¿Cuál sería el resultado "?" sin romper las reglas matemáticas? Si a "?" se le da el valor de "cero", entonces no se cumple porque el resultado multiplicado por el divisor tiene que ser igual al dividendo. Y lo mismo ocurrirá si el resultado es "n".

Aparentemente se trata de una contradicción muy gruesa para una disciplina científica hasta tanto no se pueda resolver esta cuestión y las demás planteadas en este comentario si es que se pretende darle al "cero" la categoría de número y cantidad.

Este hecho, de persistir, adquiere enorme importancia si se presentan los cálculos matemáticos como una cosa absoluta al avanzar sobre asuntos que se encuentran más allá del método de contar, tal como sucede, por ejemplo, con los decimales del factor Pi, cuando en tal caso son **relativas** a un sistema convencional dentro del lenguaje unívoco de las matemáticas. Es decir, los decimales de Pi obtenidos por el sistema matemático pueden ser considerados exactos dentro de sus propias convenciones en las que se considera al cero como un número más, pero no pueden ser impuestos como exactos fuera de las mismas.

La Cuadratura del Círculo es un ejemplo. La Cuadratura del Círculo está planteando un problema que no es meramente numérico sino geométrico y numérico como mínimo, porque abarca además otras disciplinas científicas cuyo conjunto puede armonizar sin contradicciones y resolver el problema si toma al sistema matemático de contar y calcular como algo relativo y no absoluto.

---

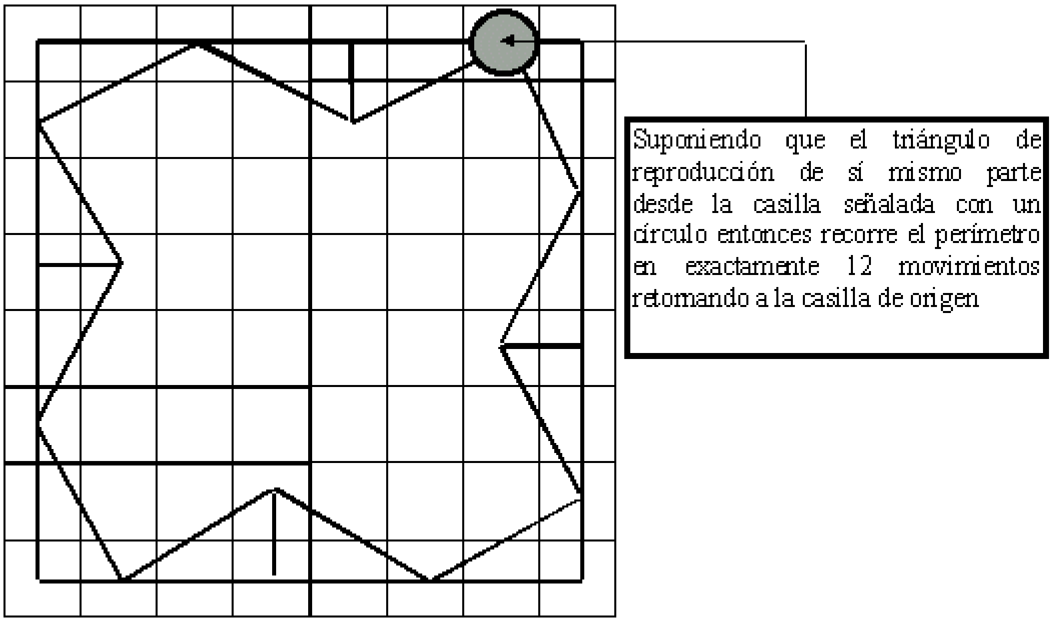
## Capítulo 5

### RELACIONES DIRECTAS DEL SIGNIFICADO

### DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO

### CON LA MUSICA, LO CROMATICO, KEOPS , LA QUIMICA Y LA UNIDAD

**En el Capítulo 1 se menciona el siguiente gráfico:**




**Este círculo recurrente de 12 pasos del triángulo áureo en el cuadrado de ocho ocurre de un modo idéntico en el mundo de las ocho notas musicales en lo que se denomina escalas en bemoles y sostenidos por quinta justa.**

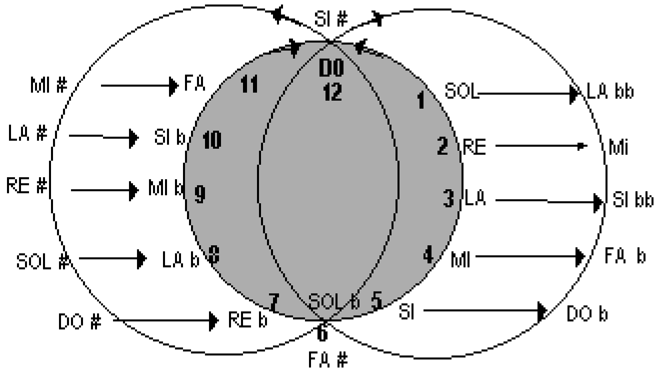
$$\frac{5a.}{7} = 0{,}714285714285\ldots$$

**Esto quiere significar que a partir de una nota cualquiera (suponiendo Do en este caso), parten dos escalas en sentido contrario. Una de ellas es en bemol es decir una escala en un semitono más bajo, y la otra parte de la misma nota (Do) en sostenido, es decir un semitono más alto.**

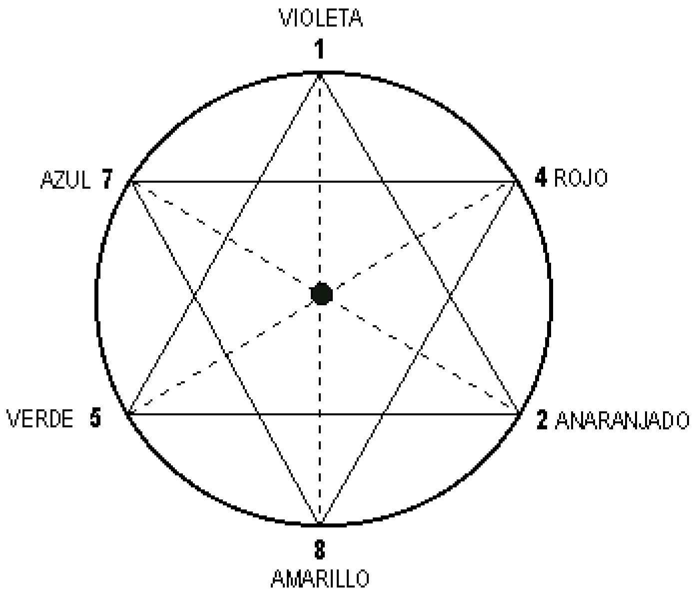
**La lógica basada en los conceptos y convenciones cerebrales dicen que esas dos escalas van en sentido contrario y a medida que avancen se irán alejando cada vez más una de la otra.**

**Sin embargo el oído, un sentido armónico con el funcionamiento cerebral, percibe todo lo contrario. Esas dos escalas, una en bemol y otra en sostenido, retornan circularmente al punto de partida (el Do inicial) en 12 pasos sin haber salido jamás de la nota de partida**, tal como ocurre geométricamente con el triángulo áureo al recorrer el perímetro de 28 casillas del cuadrado de 8.

Lo que sucede en la música es mostrado por la respectiva disciplina del siguiente modo:




Se trata de una octava que va de un Do al mismo Do (con otra notación) a través de 6 notas intermedias. Cosa que se repite en la disgregación cromática de la luz blanca constituyendo la siguiente estrella de 6 puntas inscriptas en un círculo en que se han tomado la secuencia de colores naturales que habitualmente utilizamos:




El círculo cromático está numerado con el número periódico 142857 surgido de la frecuencia de fragmentos de 7 decimales para Pi, y arroja el siguiente resultado entre los colores complementarios unidos por las líneas punteadas:

1 + 8 = 9

7 + 2 = 9

4 + 5 = 9

Siendo 9 el círculo recurrente de los nueve números naturales del 1 al 9, sin la presencia convencional del concepto de "cero".

A su vez los 12 pasos están relacionados con la sumatoria de 12 que es 78 ( ver "subtotal" en la tabla del número periódico 142857 en el adicional del capítulo 3).

De estas relaciones directas con el significado de la cuadratura del círculo que se están mostrando surge la siguiente fórmula:

$$\frac{78 * 0,714285714285...}{9} = 6,19047619...(a)$$

nota: 0,714285714285... surge del comentario sobre la 5a. justa de las escalas musicales

Este resultado denominado (a) se convertirá en una constante que unirá el cuadrado mágico de 8 con la Pirámide de Keops.

La distribución numérica del cuadrado mágico de 8, con constante 260, es la siguiente:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 59 | 60 | 61 | 62 | 2 | 1 |
| 10 | 15 | 51 | 52 | 53 | 54 | 10 | 9 |
| 41 | 42 | 22 | 21 | 20 | 19 | 47 | 48 |
| 33 | 34 | 30 | 29 | 28 | 27 | 39 | 40 |
| 25 | 26 | 38 | 37 | 36 | 35 | 31 | 32 |
| 17 | 18 | 46 | 45 | 44 | 43 | 23 | 24 |
| 56 | 55 | 11 | 12 | 13 | 14 | 50 | 49 |
| 64 | 63 | 3 | 4 | 5 | 6 | 58 | 57 |

**SUMA DE TODAS LAS CASILLAS DE LOS PERIMETROS CON LOS SIGUIENTES ANGULOS:**

**(a) 8 / 1 / 57 / 64 = 910**

**(b) 15 / 10 / 50 / 55 = 650**

**(c) 22 / 19 / 46 / 43 = 390**

**(d) 29 / 28 / 37 / 36 = 130**

Seguidamente se ponen en relación estos cuatro perímetros con la constante 6,19047619... (a):

| RELACION DIRECTA CON PIRAMIDE DE KEOPS | | | |
|---|---|---|---|
| Medidas en metros Keops | por Constante (a) | | Perímetros |
| 231 mts. | 6,19047619... | = | 910 + 390 + 130 |
| 147 mts. | 6,19047619... | = | 910 |
| 189 mts | 6,19047619... | = | 650 + 390 + 130 |

La altura de 147 mts. de Keops hace de nexo que conduce a una relación directa con la Unidad, al mismo tiempo que muestra una posibilidad ascendente y descendente de carácter vertical.

La relación directa más notable está relacionada con la arista 189 mts. de Keops. Si se observa la Tabla Periódica de Elementos, puede comprobarse que el recuadro de 5 por 5 de los "no metales" está dividido por una diagonal escalonada tipo Pirámide. La suma de los números atómicos de los elementos que componen esos escalones de la diagonal es la siguiente:

5 + 14 + 33 + 52 + 85 = 189 (arista de Keops)

Y lo mismo ocurre si se suman los números atómicos de los escalones de la diagonal opuesta:

9 + 16 + 33 + 50 + 81 = 189

Hay que recordar que el cuadrado de 8 tiene un perímetro de 28 casillas que es recorrido circularmente que numéricamente es 9 según los complementarios del círculo cromático y los números naturales sin la presencia del cero. De ello surge una recurrencia periódica que es similar a la recurrencia 142857 de los fragmentos de decimales de Pi y se relaciona con la misma:

$$\frac{8^2}{28*9} = 0,253968253968...$$

Se trata de una recurrencia de 6 dígitos en los que faltan los números correspondientes a la altura de Keops, es decir 147.

La diferencia de esta recurrencia cromática con la recurrencia matemática de los fragmentos de Pi, en que faltan los números 3, 6 y 9, es la siguiente:

0,253968253 - 0,142857142 = 0,111111111 (todos los números con 10 dígitos)

Si esta diferencia es elevada a la potencia 2 arroja el siguiente resultado:

0,012345678 9 87654321

Un ascenso y descenso numérico que tiene como neutro y nexo al número 9, mientras que la suma de todos esos números es el número 9 elevado a la potencia 2.

Finalmente ese ascenso y descenso multiplicado por 9 elevado a la potencia 2 es igual a la Unidad:

0,012345678 9 87654321... * 81 = **1**

Se ha demostrado de este modo el título del presente capítulo:

**RELACIONES DIRECTAS DEL SIGNIFICADO**

**DE LA CUADRATURA DEL CIRCULO**

**CON LA MUSICA, LO CROMATICO, KEOPS, LA QUIMICA Y LA UNIDAD**

El capítulo siguiente, número 6, se referirá a la relación directa de la cuadratura del círculo con el Hombre.

---

## Capítulo 6

## EL SIGNIFICADO DE LA CUADRATURA DELCIRCULO

## EN EL HOMBRE

**Existe una correspondencia muy directa entre las diferentes frecuencias vibratorias que dan origen a la octava musical y las que se producen en la disgregación de una octava cromática de la Luz Blanca en el ojo humano, comentadas en el capítulo 5 y directamente relacionadas con la cuadratura del círculo.**

**Sin embargo esas frecuencias vibratorias no son de la misma naturaleza. Las vibraciones cromáticas en que se disgrega la Luz Blanca en el ojo tienen diferentes niveles de cualidad**. Y al decir esto se quiere significar la misma clase de diferencia de cualidad que existe entre una semilla y el árbol, por ejemplo. Mientras que las vibraciones de la octava musical son generadas por una actividad cerebral convertidas en conceptos por el cerebro humano. No tienen diferentes niveles de cualidad en el sentido que se le otorga en el caso de las frecuencias vibratorias cromáticas disgregadas de la Luz Blanca. En un caso, el de la música, es conceptual, en el otro, el cromático, es verdadera.

Sin embargo ambas tienen una correspondencia invertida, como se podrá observar seguidamente.

En primer lugar se expone un gráfico con las vibraciones por segundo correspondientes a la octava musical tomadas en base a la cuerda "MI" de la guitarra, por ejemplo:

| Notas obtenidas | Intervalos | Notas cuerda | Vibraciones por segundo |
|---|---|---|---|
| DO | | MI | 320 |
| | 9 / 8 | | |
| RE | | FA SOST. | 360 |
| | 10 / 9 | | |
| MI | | SOL SOST. | 400 |
| Detención | 16 / 15 | | |
| FA | | LA | 420 |
| | 9 / 8 | | |
| SOL | | SI BEMOL | 480 |
| | 10 / 9 | | |
| LA | | DO SOST. | 520 |
| | 9 /8 | | |
| SI | | RE SOST. | 600 |
| Detención | 16 / 15 | | |
| DO | | MI | 640 |

Hablar de luz es hablar del color.

La dispersión de la luz blanca (los 6 colores del círculo cromático) es una escala Vertical no creada por el cerebro. El ojo o el cerebro del que forma parte no puede, por sí solo, descomponer la luz blanca en los colores que luego ve.

La luz blanca se dispersa debido a que la luz varía la longitud de onda si atraviesa un medio que **NO SEA VACIO DE FORMAS Y SENSACION DE MASA CEREBRAL**, función que en el ojo cumple la substancia refractora de sal, agua y albúmina que lo compone.

Tal cosa equivale decir que la refracción o desviación **AUMENTA** cuando la longitud de onda **DISMINUYE**, y viceversa. La dispersión tiene que ser considerada entonces como **EL RESULTADO DE UNA REFRACCION O DESVIO DESIGUAL PERO CON UN RITMO PRECISO DE TALES DESVIOS.**

Tiene que quedar claro que la luz atraviesa el "vacío relativo" sin dificultad, **MIENTRAS QUE EL SONIDO ESTA INEVITABLEMENTE VINCULADO A UN MOVIMIENTO DE LA MATERIA. Esto es una diferencia fundamental.**

En cuanto al color hay que decir que la materia que se observa como tal, carece de color. El color que se aprecia como característica de esa materia proyectada por el cerebro es el producto de un rechazo de colores de la dispersión de la luz que no son absorbidos por dicha materia.

Supongamos un paño **ideal** de color rojo que absorbe todas las longitudes de ondas de la luz excepto las longitudes de onda color rojo. ¿Cómo se vería ese paño iluminado por una lámpara de vapor de sodio cuyo color predominante es el amarillo? Se vería negro, porque absorbería la longitud de onda del amarillo y no rechazaría longitud de onda alguna. Para que "Idealmente" apareciera otra vez como rojo habría que iluminarlo con una luz cuya longitud de onda fuera el rojo, de modo que no pudiera absorberlo.

De modo tal que el color que aparentemente presenta la materia no es un proceso aditivo sino un proceso substractivo.

La comparación entre los colores de luz y los de pintura es la siguiente:

| CIRCULO | COLORES LUZ | COL. PINTURA |
|---|---|---|
| Primario | Azul | Azul |
| Primario | Verde | Amarillo |
| Primario | Rojo | Rojo |
| Secundario | Cyan | Verde |
| Secundario | Amarillo | Anaranjado |
| Secundario | Magenta | Violeta |

Para realizar una explicación que pueda ser comprendida con mayor facilidad se utilizarán los colores de pintura, y seguidamente se expone el mismo gráfico utilizado para los sonidos pero esta vez en longitudes de onda en milimicras, para la disgregación cromática de la Luz Blanca:

| Color | Intervalos | Longitudes redondeadas |
|---|---|---|
| BLANCO | | 760 |
| | 9 / 8 | |
| ROJO | | 675,5 |
| | 10 / 9 | |
| ANARANJADO | | 608 |
| Detención | 16 / 15 | |
| AMARILLO | | 570 |
| | 9 / 8 | |
| VERDE | | 505,6 |
| | 10 / 9 | |
| AZUL | | 456 |
| | 9 / 8 | |
| VIOLETA | | 405,3 |
| Detención | 16 / 15 | |
| BLANCO | | 380 |

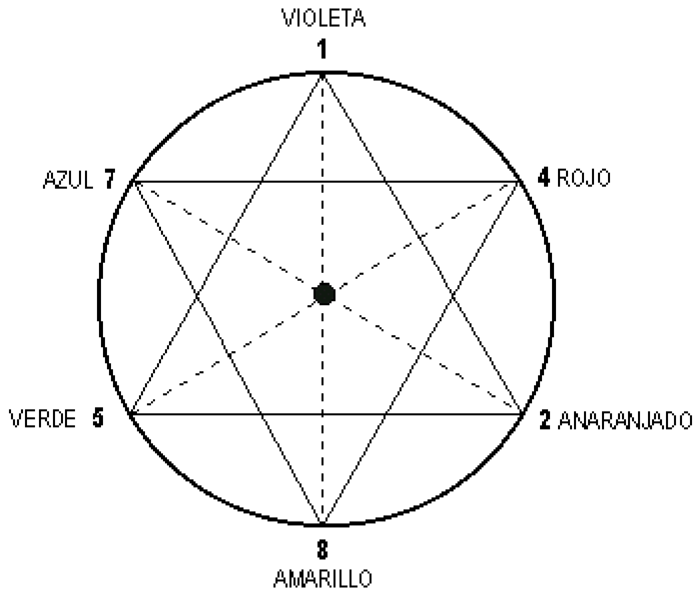
La estrella de 6 puntas está numerada con el número periódico 142857, pero procediendo a marcar los puntos en que los dos triángulos se cortan serán numerados con el número periódico complementario 0,235689 comentado en el capítulo 5 y en los que faltan los números 147 (altura de Keops). Este número se aplica al triángulo equilátero que "mira" hacia arriba. Y a cada punto de la recurrencia 0,235689 se le asigna un color a partir del rojo en forma ascendente, es decir a la inversa de la disgregación constituyendo este símbolo:

Como se puede observar existe un ritmo idéntico entre ambas cosas. Un ritmo que se quiebra en dos lugares muy precisos que se encuentra sombreados y que señalan una detención en la continuidad de la octava.

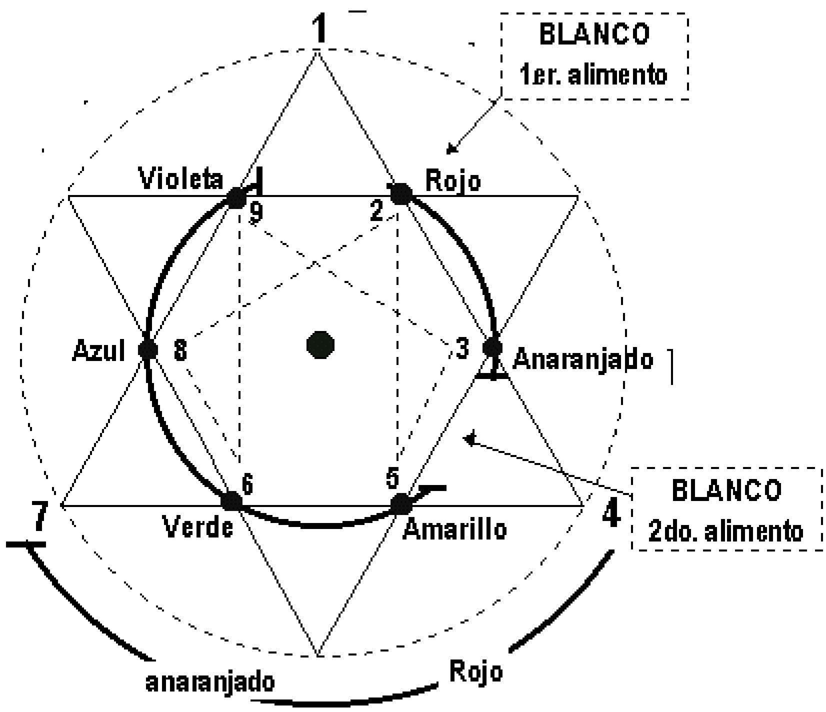
En música se dice que en esa detención falta un semitono entre Mi y Fa y entre Si y Do. Y existe lo denominado "acorde perfecto mayor" que funciona por 5a. justa, también mencionada en el capítulo 5, que se reproduce a sí mismo automáticamente a través de la quinta nota de la octava es decir la nota "Sol", y esto llena el espacio de la detención permitiendo que la octava concluya.

¿Qué relación tiene todo esto con el Hombre?

Para exponer esa relación se traslada el siguiente gráfico incluido en el capítulo 5:




La estrella de 6 puntas está numerada con el número periódico 142857, pero procediendo a marcar los puntos en que los dos triángulos se cortan serán numerados con el número periódico complementario 0,235689 comentado en el capítulo 5 y en los que faltan los números 147 (altura de Keops). Este número se aplica al triángulo equilátero que "mira" hacia arriba. Y a cada punto de la recurrencia 0,235689 se le asigna un color a partir del rojo en forma ascendente, es decir a la inversa de la disgregación constituyendo este símbolo:



Los números ubicados en los cortes entre los dos triángulos integran al hombre psico-físico del siguiente modo:

### 2. Sistema digestivo.

### 3. Sistema respiratorio.

### 5. Magnetismo animal, físico.

### 6. Función intelectual-cerebro.

### 8. Función emocional-cerebro.

### 9. Sistema nervioso central: Centro Instintivo, Centro Motor y Centro Sexual.

Cada uno de estos aspectos esenciales del hombre psico-físico funcionan con una energía de diferente cualidad que es aportada por los alimentos externos que son digeridos por el cuerpo físico. Y existen dos alimentos exteriores que penetran en el cuerpo físico: el sólido-líquido por un lado, y el aire que se respira por el otro. Aquel es el primer alimento, éste es el segundo.

Esos dos alimentos entran integrados y son sutilizados por la digestión en diferentes niveles de cualidad.

El primer alimento que no es mecánico o automático en su recepción, si se quiere decir de este modo, es el que está representado como "Blanco-primer alimento" que penetra directamente al aparato digestivo. Allí se produce la primera parte de la digestión y pasa automáticamente por el rojo y el anaranjado en su proceso de sutilización, pero se detiene en el punto 4 del triángulo. Es decir en uno de los números faltantes en el número periódico ubicados en los cortes entre los dos triángulos.

Si en esa detención no entrara el segundo alimento-aire, la octava no podría seguir su proceso porque allí hay una detención que fuera señalada en los dos gráficos comparativos entre música y colores.

Por esta razón la respiración es automática, mecánica. Es obligatoria de instante en instante. No puede detenerse más de dos o tres minutos sin que aparezca el riesgo de la desintegración física. El primer alimento, en cambio, puede evitarse hasta treinta días aproximadamente.

Es por lo tanto la entrada del segundo alimento aire por el punto 4 del triángulo lo que permite que la octava de la digestión del primer alimento **supere la detención** y prosiga hasta el punto 9,. Allí aparece la segunda detención precisamente en el punto 1 del triángulo. Es decir, esa primera octava no se completa.

Pero a su vez, el segundo alimento-aire inicia su propia octava, más sutilizada que la anterior, y avanza hasta el punto 7 del triángulo en el que está marcada la primera detención para esta octava de aire, y allí se detiene luego de aportar nuevas energías al magnetismo animal y a la función intelectual.

Y esto es todo lo que ocurre en el hombre psico-físico. Con lo aportado mecánicamente por estas dos octavas de alimentos inconclusas le basta y sobra para existir. Le alcanza para armar una guerra o dedicarse a la beneficencia, para amar y odiar, para convertirse en un decente social o en un delincuente.

Le alcanza para todo eso pero no le alcanza para vivir en plenitud.

Si existe alguna posibilidad en el Hombre para vivir en Plenitud, esa posibilidad está en el punto 7 del triángulo, es decir en la detención del segundo alimento-aire.

De existir esa posibilidad y realizarse, allí ocurriría la entrada de un tercer alimento, tan verdadero como los otros dos como mínimo,. que permitiría que la octava de aire prosiguiera su desarrollo, y al mismo tiempo se iniciaría una tercera octava desde el ingreso de ese tercer alimento.

Y si las tres octavas se integraran surgiría un Hombre Integrado, pleno.

Este es el significado invisible que surge de la **solución** de la cuadratura del círculo. Es un significado de carácter religioso.

El esquema que se ha comentado ha sido muy divulgado en la primera mitad del siglo pasado pero no habiéndose descubierto la solución de la cuadratura del círculo se utilizó un eneagrama, en lugar de la estrella de seis puntas, y las octavas que circulaban en el mismo eran musicales lo que implica un desconocimiento porque las notas musicales no son de diferentes cualidades sino un concepto. Y la digestión de alimentos no es un concepto sino un verdadero cambio de cualidades que se van sutilizando. Se trata, obviamente, de un proceso químico.

Tal cosa quiere significar que se tiene que producir una transformación química en cadena para lo cual es necesaria una trilogía de elementos: uno de superior cualidad que actúe sobre otro de inferior cualidad y produzcan un elemento neutro que los contiene a los dos pero sin ser ninguno de los dos.

Esto es lo que está indicando la línea punteada que está en el interior de la estrella de seis puntas, que sigue la secuencia del número periódico:

2 - 5 - 3 - 9 - 6 - 8

que se encuentra mencionado en el capítulo 5, al indicar el ascenso-descenso matemático.

En la primera tríada punteada los números son:

**2 = Rojo**

**5 = Amarillo**

**3 = Anaranjado**

Y como es sabido amarillo sobre rojo produce un color anaranjado.

En la segunda tríada punteada los números son:

**9 = Violeta**

**6 = Verde**

**8 = Azul**

Y como es sabido violeta sobre verde produce un color azulado.

## LA POSIBILIDAD POTENCIADA EN EL PUNTO 7 ES IMPAR

Las sencillas razones matemáticas que tuvo Fermat al proponer su último teorema (referido al cuadrado triangular) quizás se encuentran descubriendo la esencia matemática del funcionamiento de las potencias.

**POTENCIA DOS:**

"Con excepción de la potencia dos es imposible que la suma de dos números enteros elevados a la potencia "n" sea igual a un tercero de la misma potencia", **que es lo que sucede con la triangulación circular en la estrella de seis puntas como derivación de la cuadratura del círculo. Tan sólo sucede en un círculo - cuadrado.**

Todos los números enteros potenciados están constituidos por la suma de números impares.

El cuadrado tiene una condición única: la suma de impares siempre se inicia desde el impar 1 en tanta cantidad de impares como el entero que se eleva a la potencia 2. Si el entero es 20, se suman los 20 primeros impares, por ejemplo.

1. Unas de las igualdades en potencia dos de tres términos son las siguientes:

a) Cuadrado de 3 : **1 + 3 + 5**

Más Cuadrado de 4 : 1 + 3 + 5 + 7

Igual a Cuadrado de 5: 1 + 3 + 5 + 7 + **9**

b) Cuadrado de 6 : **1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11**

Más Cuadrado de 8 : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15

Igual Cuadrado de 10 : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + **17 + 19**

2. Existe una compensación absoluta, **algo complementario** y permanente entre los términos de la ecuación ya que la suma de los impares sobrantes del resultado (en relación con el segundo término de la ecuación) es igual a la suma de los impares del primer término de la ecuación (circuito sombreado).

3. **La cantidad** de impares sobrantes en el resultado y que se compensan con la totalidad de impares del primer término de la ecuación, es igual a la diferencia entre los números sumados, que en los ejemplos son: en a) 4 y 3, diferencia uno, y en b) 8 y 6, diferencia dos.

4. Por lo indicado en el punto 3 es que en a) el único impar sobrante es 9, siendo igual a los impares del primer término: 1 + 3 + 5 = 9. Mientras que en b) los dos impares sobrantes son 17 + 19 = 36, siendo igual a los impares del primer término: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36.

5. Tal cosa ocurre porque en todos los casos el cuadrado está constituido por la suma de impares **correlativos y ascendentes** a partir del impar UNO.

**POTENCIAS "N":**

1. En el mismo sistema de suma de impares, para obtener la potencia "n" de un número ocurre que dicha suma de impares en primer lugar **no comienza con el impar UNO** ni es una suma correlativa ascendente de impares sino **descendente**. Lo que significa que un número elevado a la potencia "n" **no contiene dentro de sí a los demás números elevados a la misma potencia**, y que la posición de la cantidad de números impares necesarios no tiene un lugar fijo y predeterminado como en el caso de la potencia dos en que todos los números impares que la constituyen comienzan con el impar UNO. De allí que en la potencia dos la suma es ascendente y en la potencia "n" será siempre descendente.

2. La fórmula para ubicar la posición impar en que se inicia la suma de impares descendentes es la siguiente, siendo "X" el número que será elevado a la potencia "n" y "Z" el impar inicial:

$$X^{n-1} + (X - 1) = Z$$

Suponiendo que "X" es el número 5 que quiere ser elevado a la potencia cuarta:

$$5^3 + (5 - 1) = 129 \text{ (Impar inicial)}$$

Como "X" es el número 5, entonces la cantidad de impares descendentes tendrán que ser 5 a partir del impar 129:

129 + 127 + 125 + 123 + 121 = 625 ( 5 elevado a la cuarta potencia )

Otro ejemplo. Supongamos el número 14 elevado a la 5a. potencia, cuyo resultado es 537.824. En tal caso el procedimiento es el que sigue:

$$14^{5-1} + (14 - 1) = 38429$$

El número impar inicial es 38429 y tendrán que sumarse un total de 14 impares descendentes:

38429+38427+38425+38423+38421+38419+38417+38415+38413+38411+38409+38407+38405+38403 = 537824

(Tomado del libro "El Evangelio Hipográfico", de Abelardo Falletti, Edición Agosto 1999, ISBN 987-43-1031-6; "Rastros de un vuelo solitario", de Abelardo Falletti; "El Camino Ambar", de Abelardo Falletti, y de los demás libros mencionados en los capítulos anteriores).

## LEONARDO DA VINCI Y LA CUADRATURA HUMANA

(colaboración basada en la página de Carlos Calvimontes: **http://www.urbtecto.com/** )

Sin duda, uno de los mas famosos dibujos de Leonardo da Vinci es el llamado "hombre de Vitruvio"

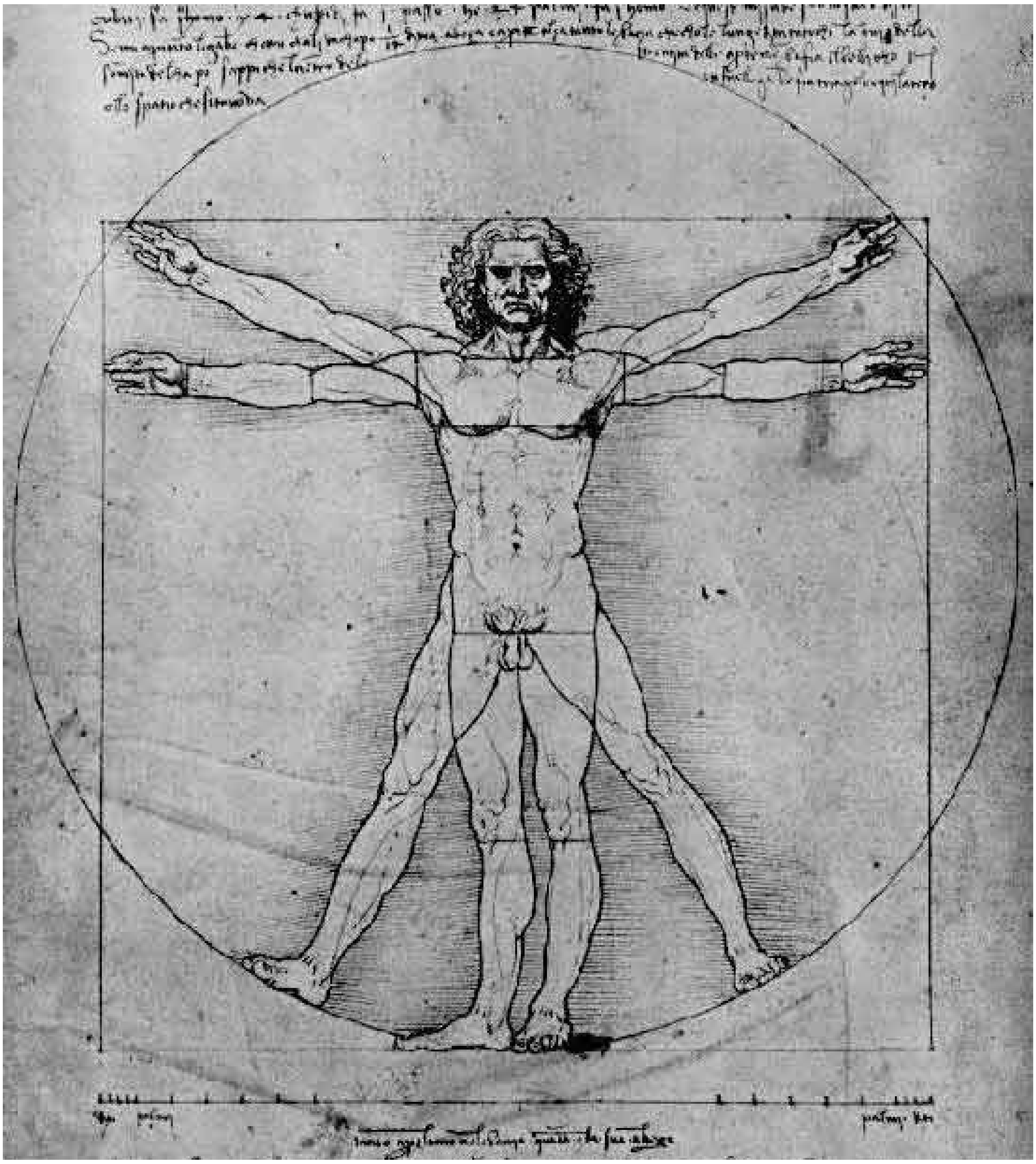


**Fig 1.**

Este dibujo se ha convertido en un auténtico símbolo ya que recoge varias de las ideas claves del pensamiento renacentista: el hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción y demás.

El dibujo responde perfectamente al esquema descrito por Vitruvio

**"... y también el ombligo es el punto central natural del cuerpo humano, ya que si un hombre se echa sobre la espalda, con las manos y los pies extendidos, y coloca la punta de un compás en su ombligo, los dedos de las manos y los de los pies tocarán la circunferencia del círculo que así trazamos. Y de la misma forma que el cuerpo humano nos da un círculo que lo rodea, también podemos hallar un cuadrado donde igualmente esté encerrado el cuerpo humano. Porque si medimos la**

**distancia desde las plantas de los pies hasta la punta de la cabeza y luego aplicamos esta misma medida a los brazos extendidos, encontraremos que la anchura es igual a la longitud, como en el caso de superficies planas que son perfectamente cuadradas".**

(tomado de **http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/leonardovi.htm**)

En resumen: un círculo y un cuadrado que delimitan las dimensiones de la figura humana.

## El hombre de Vitruvio y la razón áurea

**¿Cómo trazó Leonardo el círculo y el cuadrado? ¿que relación guardan ambas figuras?.**

Estas sencillas preguntas no tienen a mi entender una respuesta igualmente sencilla. Veamos:

Si seguimos a Vitruvio al pie de la letra hemos de empezar por trazar el círculo y, como se repite a menudo
(ver p.ej.:
**http://www.pntic.mec.es/pagtem/arte/pintura/aurea3.htm**
**http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/goldslide/jbgoldslide.htm**
**http://thealchemicalegg.com/leotaroN.html** )

**el** mismo **ombligo divide la altura por la razón áurea** por lo que el lado del cuadrado queda perfectamente definido. Es decir, sean:

D = diámetro del círculo y por tanto D/2 su radio

L = lado del cuadrado, por tanto: L/D/2 = 2L/D = fi = 1,618033989...

En virtud de esto Leonardo habría construido el cuadrado a partir del círculo siguiendo una conocida construcción de la razón áurea (ver Fig 2)

Se halla la mitad del radio (D/2 = a) y con centro en tal punto medio y radio la distancia al extremo del radio horizontal se traza un arco que corte al diámetro vertical, esto nos da el punto p y por tanto el segmento b de modo que a+b = L lado del cuadrado.

El cuadrado obtenido por tal procedimiento sin duda se parece al del original pero..
**¿es exactamente así?...**

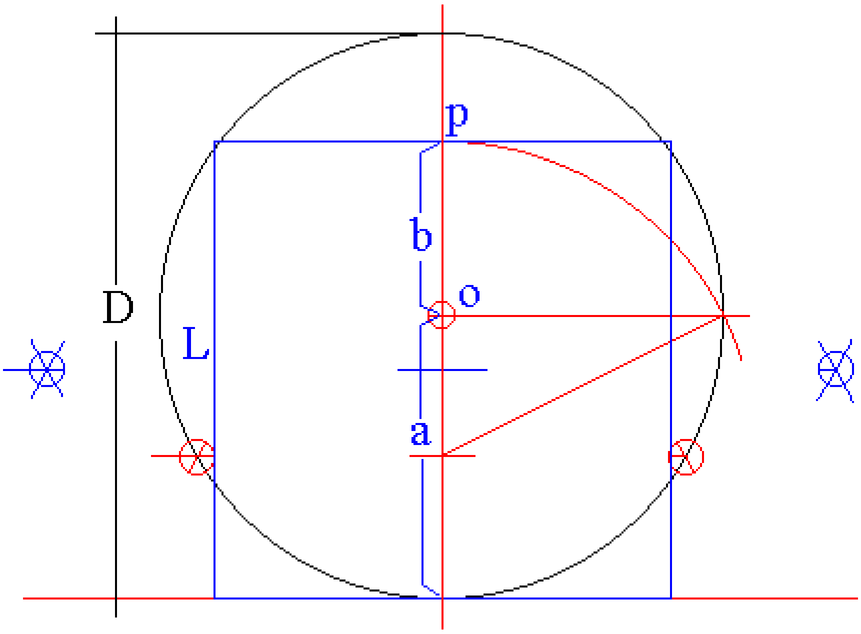
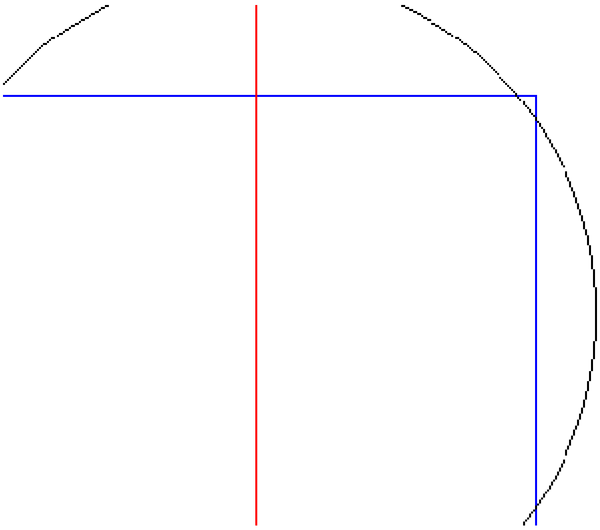
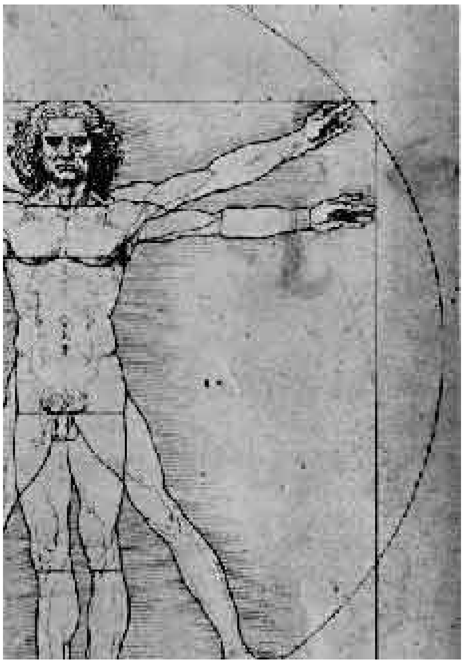



**Fig 2**

En la figura 3 se presenta el mismo dibujo abajo a la izquierda comparado con otro en el que el tamaño del cuadrado con relación al círculo es algo mayor





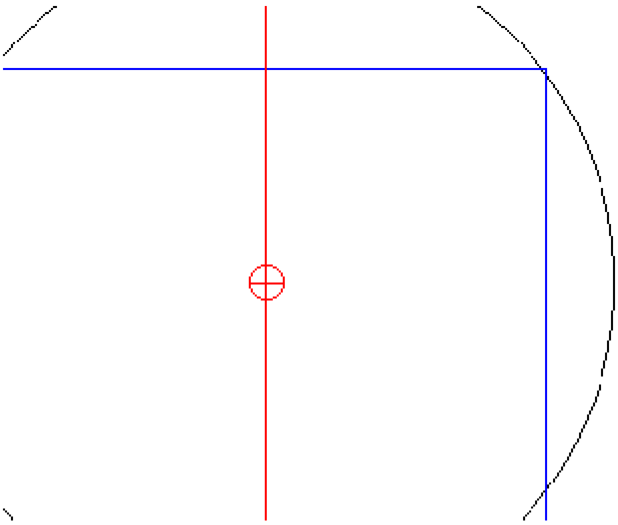


**Fig 3**

¿cuál se parece mas al dibujo de Leonardo?... Yo estimo que el arriba. Y lo creo así cuando me fijo en las dos esquinas superiores del cuadrado que quedan "cortadas" por el círculo. En el dibujo original se las aprecia claramente. Si el trazado de Leonardo se hubiese ajustado a la construcción áurea tales esquinas serían apenas visibles.

## El dibujo de Leonardo y la cuadratura del círculo

Y aquí entra en escena la estupenda página de Carlos Calvimontes :
**http://www.urbtecto.com/**

Sabemos que el problema de la cuadratura del círculo ocupó y preocupó a Leonardo quien no solo estudió formas mecánicas de resolver el problema sino que llenó libretas de anotaciones con "cuadraturas".

Según Augusto Marinoni, *'El problema de geometría que absorbió a Leonardo interminablemente fue la cuadratura del círculo. A partir de 1504 en adelante dedicó cientos de páginas de sus cuadernos a esta cuestión ... que fascinó a su mentor Pacioli ... . Mientras que estas investigaciones no produjeron apreciables progresos en matemáticas Leonardo creó una multiplicidad de complejos y preciosos diseños"*

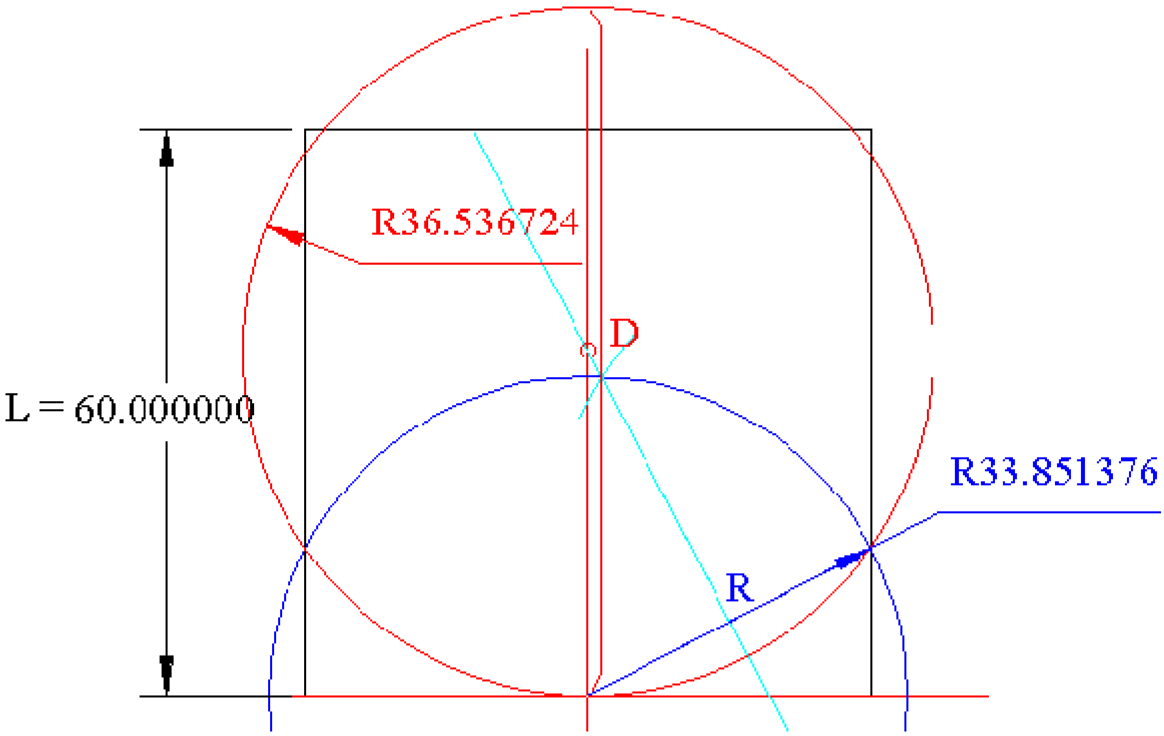
(traducido de
**http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit14/unit14.html** )

**¿Y QUE TIENE QUE VER ESTO CON NUESTRA PREGUNTA INICIAL?**

La respuesta que nos da C.Calvimontes es bien sugestiva:

el círculo visible en el dibujo de Leonardo procede de una construcción relacionada con la cuadratura del círculo.

Fijémonos en la figura 4 :



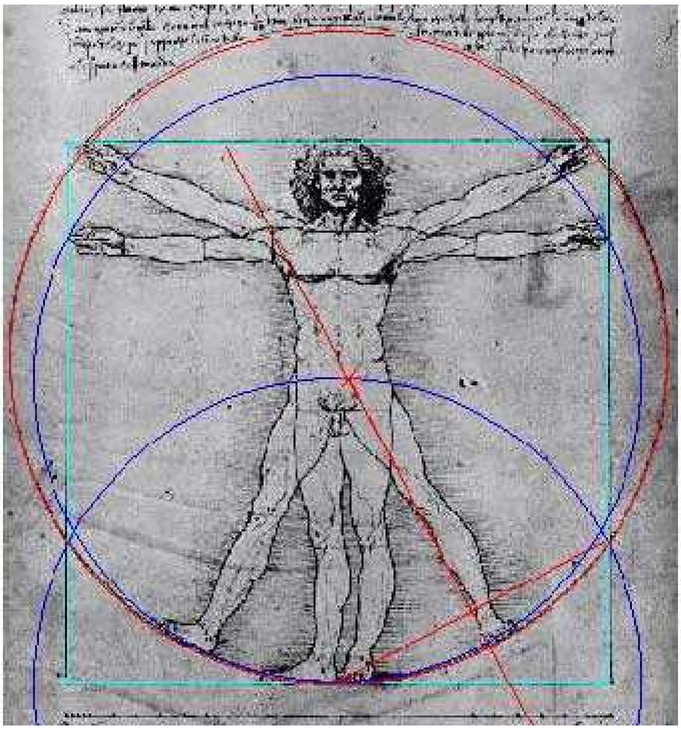


**Fig 4**

La propuesta de C.Calvimontes es que el **círculo visible de Leonardo corta al lado del cuadrado del tal forma que el segmento R** = distancia del punto tangente inferior al corte del lado **es el radio de un círculo** (oculto en el dibujo de Leonardo) **de igual área que el cuadrado**.

Se invita al lector a sacar una copia impresa del dibujo de Leonardo y verificar sobre él (la copia impresa debe guardar las proporciones) que la propuesta de C.Calvimontes *"si non e vero e ben trovato"*

.

Otras comprobaciones adicionales pueden hacerse en base a que el segmento R queda definido por la relación:

$$R^2 = \frac{D^2 - D\sqrt{D^2 - L^2}}{2}$$

(para cualquier par de valores D y L, si y solo si, $D > L$ ya que si $D<L$ la raíz es imaginaria y no hay punto de corte).

A partir de tal ecuación general puede deducirse:

$$\frac{L^2}{R^2} = 2 + \sqrt{4 - f^2}$$

Donde **f** representa la relación entre el lado y el radio del la figura de Leonardo, es decir:

$$\frac{L}{D/2} = f$$

Con estas herramientas, si C.Calvimontes tiene razón entonces:

$$\frac{L^2}{R^2} \approx \pi \quad \Rightarrow \quad f = 1.642\ldots$$

Que difiere de la razón áurea en un 1.5% aprox.

Esta diferencia es por un lado lo suficientemente pequeña como para haber despistado hasta ahora a mucha gente empeñada en ver la razón áurea en el ombligo del hombre de Vitruvio, pero también lo bastante grande como para darnos cuenta que si Leonardo hubiese utilizado la construcción de la razón áurea expuesta en la figura 2 (construcción que sin duda conocía) el cuadrado no habría cortado al círculo dejando las esquinas superiores tan visibles.

## La "circulatura" del cuadrado

En este punto, nos volvemos a preguntar: **¿cómo trazó Leonardo el círculo y el cuadrado de su dibujo?.**

A la vista de lo anterior podríamos suponer que siguió las etapas siguientes:

1. Partió del cuadrado que vemos ...

2. ...halló el círculo de igual área (círculo que permaneció oculto)

3. dibujó luego otro círculo de igual radio pero con centro en el punto medio del lado-base del cuadrado (ver fig. 4) y hallo los puntos de corte con los dos lados, derecho e izquierdo, del cuadrado

4. trazó la mediatriz del segmento R y la prolongó hasta cortar el eje vertical hallando así el centro del círculo que finalmente es que aparece en su dibujo.

Para recorrer este camino Leonardo se habría planteado en el paso "2" **la cuadratura del círculo a la inversa, es decir, la circulatura del cuadrado**.

C.Calvimontes describe un camino tal como este. Pero lo hace asumiendo que Leonardo utilizó como apoyo un círculo de diámetro igual a pi. En este punto yo me permito (con todos mis respetos) discrepar.

Leonardo pudo haber encontrado la *circulatura* del cuadrado y utilizarla para su genial dibujo. Y ello sin recurrir al círculo de diámetro pi.

(obsérvese que resulta algo raro recurrir a un círculo de diámetro pi cuando, tanto si buscamos la cuadratura del círculo como su inversa, el problema radica precisamente en halla una construcción de **pi**)

Las pistas que hacen verosímil la construcción que a continuación describo son las siguientes:

- ya ha habido autores que han señalado que los dedos índice y/o anular de las manos de los brazos horizontales parecen señalar unos puntos concretos de los lados del cuadrado. Y hay quien ya ha sugerido que señalan precisamente el punto de corte del "**circulo oculto**" con el cuadrado.

- Los puntos señalados por las manos horizontales están perfectamente alineados con un **trazo horizontal recto** (visible) a la altura de las clavículas y que parece formar la base de la cabeza.

- Hay otros dos trazos rectos horizontales también visibles en el dibujo: **uno de ellos** cruza el sexo y señala evidentemente **el centro del cuadrado** (dejo a los historiadores el significado de semejante "centro" tan estratégicamente ubicado); **el otro** une los pezones de los pectorales y resulta estar colocado justo en la mitad de la distancia del anterior al punto superior de la cabeza, es decir, **los pectorales están a ¾ de la altura**.

¿Son estas pistas fiables?, ¿de verdad Leonardo "señaló" su círculo oculto en el propio dibujo? ...

Empecemos por los puntos que **si** nos dejó señalados: **el centro del cuadrado** (el sexo), **O**, y el que queda a **medio camino hasta la cabeza**, **los pectorales**, el punto **F** (ver fig 5). Y sigamos los siguientes pasos:

1. Trazar el círculo con centro en F y radio ¼ del lado del cuadrado de partida.

2. Trazar los ejes vertical y horizontal con origen en **O** y hallar los puntos medios de los segmentos a izquierda y derecha de **O**, es decir los puntos **M** y **M'**.

3. Unir los vértices superiores del cuadrado con los puntos **M** y **M'**

4. Las rectas así trazadas cortan al circulo anterior en los puntos **E** y **E'** que obviamente están alineados en horizontal. Mi hipótesis es que Leonardo nos dejo visible al menos una parte de este segmento EE'.

5. Prolongar **EE'** hasta cortar al lado y obtener así el punto **D**, precisamente el que está señalando la mano izquierda (la que vemos a nuestra derecha).

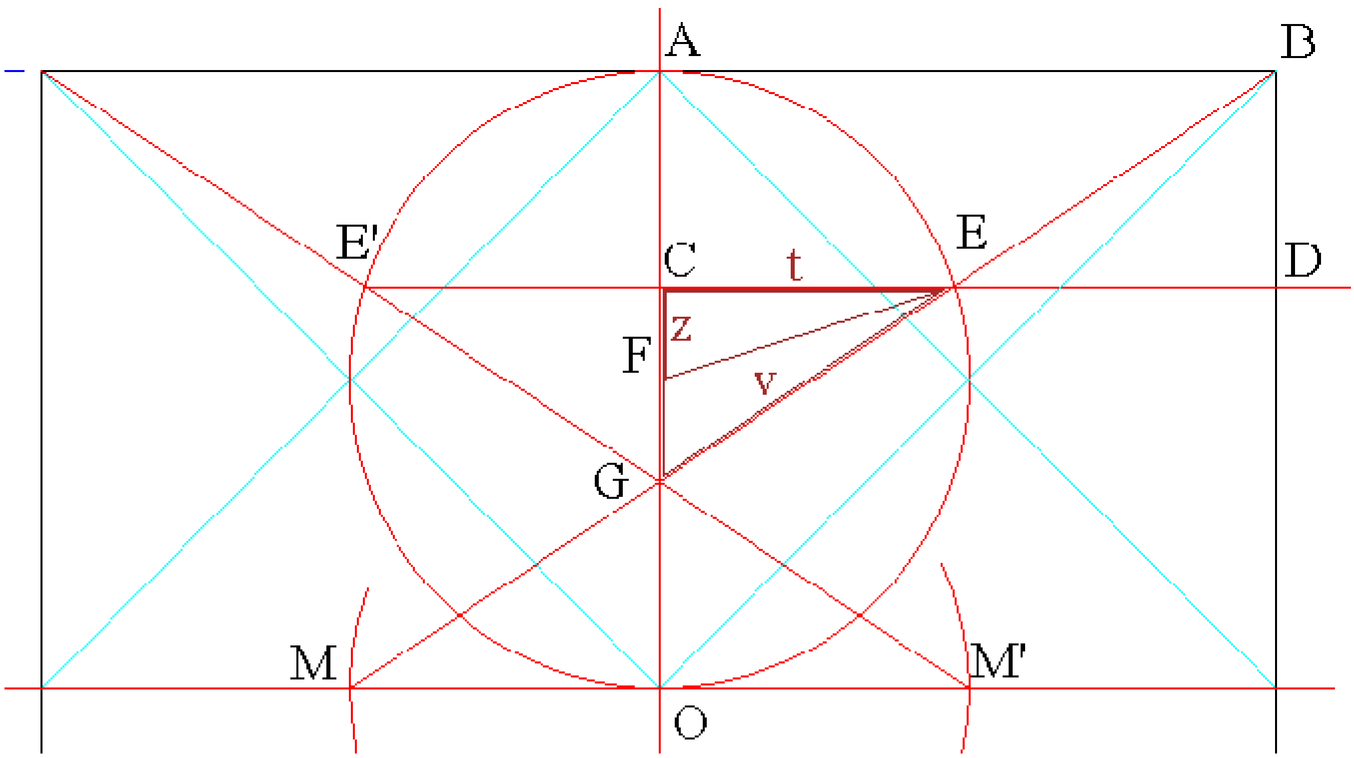



**Fig 5**

Para continuar debemos ahora fijarnos en la figura siguiente (la fig 6):

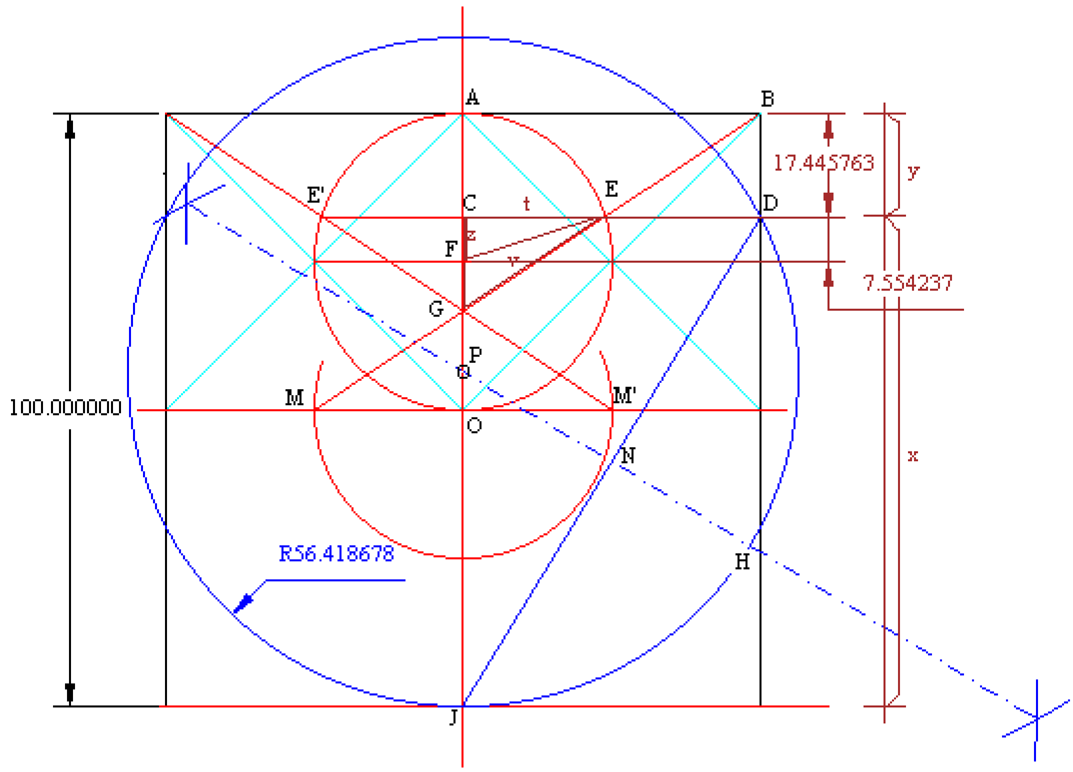



**Fig. 6**

Nota: las cotas aparecen multiplicadas por 100 para disponer de mas cifras significativas. En lo que sigue, no obstante se asume que el lado del cuadrado de partida vale 1

6. Unir el punto **D** con el punto medio de la base del cuadrado **J**

7. Hallar la mediatriz de **DJ** y el corte de esta con el eje vertical, es decir el punto **P**

8. Con centro en **P** trazar el círculo de radio **PJ** = **HD**. Este círculo cortará obviamente al lado tanto en **H** como en **D** es decir el punto que señala la mano del hombre de Vitruvio.

Esta sería la construcción vista directamente sobre el hombre de Vitruvio:

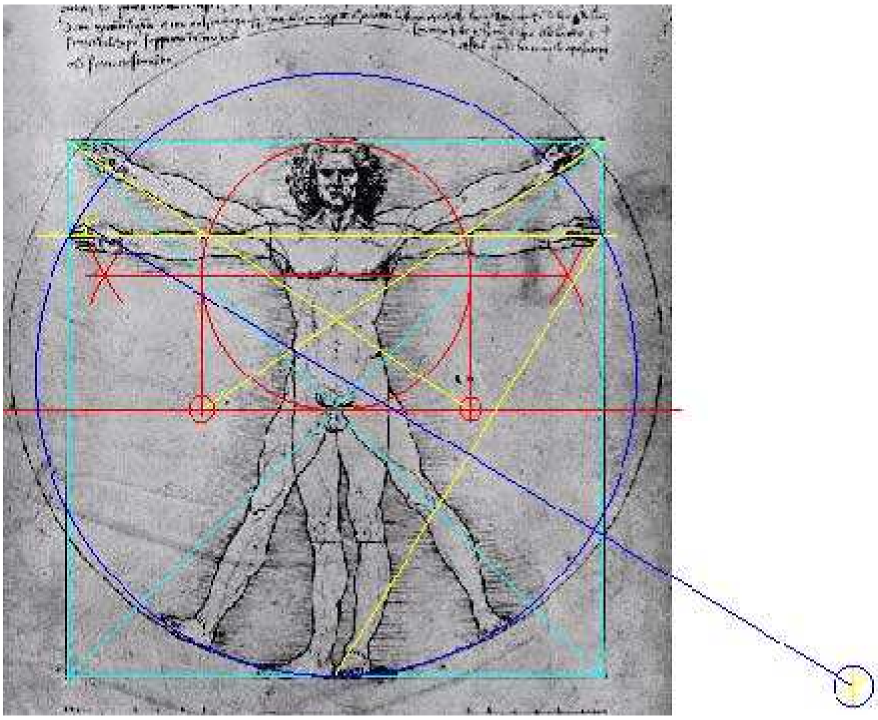


**Fig. 7**

**¿SIGUIÓ REALMENTE LEONARDO ESTE CAMINO PARA OBTENER SU "CIRCULO OCULTO" A PARTIR DEL CUADRADO?**

No lo sé . Esta construcción no la he encontrado en ninguna parte. Es de mi cosecha, siguiendo las pistas que dejo Leonardo. Les dejo a los historiadores con mas capacidad que yo de rebuscar los papeles de Leonardo, la tarea de ver si en alguno de sus múltiples cuadernos dejó alguna pista que permita verificar si fue esta la que realmente usó.

Por el momento, veamos que valor de **pi** se deduce de esta **circulatura**.

Volvamos a la figura 5. Los siguientes segmentos son fáciles de deducir:

$$\overline{AC} = \frac{1}{4} \qquad \overline{AB} = \frac{1}{2} \qquad \overline{AG} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{GB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$

Por Pitágoras en el triángulo **FCE**

$$z^2 + t^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Y aplicando Thales a los triángulos **GAB** y **GCE**

$$\frac{v}{\left(z + \frac{1}{12}\right)} = \frac{\sqrt{13}/6}{1/3} \quad ; \quad \frac{v}{t} = \frac{\sqrt{13}/6}{1/2}$$

Se tienen así tres ecuaciones con tres incógnitas: **v**, **t y z** de las que al despejar z nos queda:

$$z^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(z + \frac{1}{12}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Que nos da una ecuación de segundo grado en la que tomando la solución positiva obtenemos:

$$z = \frac{4\sqrt{3} - 3}{52} = 0.0755423698\ldots$$

Ahora ya estamos en disposición de averiguar el valor de **y**, es decir la distancia al vértice superior del punto **D**, que como se ve es la clave de esta construcción:

$$y = \frac{1}{4} - z = \frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{3} - 3}{52} = \frac{4 - \sqrt{3}}{13} = 0.17445763\ldots$$

Conocido **y** conocemos **x**, ya que **y = 1-x**.

El siguiente paso nos lleva a los dos triángulos rectángulos y semejantes delimitados por **DJ**, x y la semibase y por **DJ**/2 y el punto **H**:

$$\frac{r}{\overline{DJ}/2} = \frac{\overline{DJ}}{x} \quad ; \quad x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \overline{DJ}^2$$

Despejando r obtenemos:

$$r = \frac{4\left(9+\sqrt{3}\right)^2 + 13^2}{104\left(9+\sqrt{3}\right)} = \frac{333+11\sqrt{3}}{624} = 0.56418679\ldots$$

Como hemos partido de un cuadrado de lado **1** (recuérdese que las cotas están multiplicadas por 100 en el dibujo) y por tanto área **1** tendríamos, si el círculo hallado "circula" a tal cuadrado, que:

$$1 \approx \pi \cdot r^2 \Rightarrow \pi \approx \frac{1}{r^2} = 3.14162373\ldots$$

**Es decir, pi con un error relativo menor de 10 ppm**

(otros prefieren expresar esta aproximación como cociente, tanto mas próximo a 1 como mejor sea la tal aproximación, en este caso resultaría = 1.00000989 que por cierto es bastante mejor que el que aparece en :

**http://members.telocity.com/stephenssmith/UCSC/papers/Paper.html**

y especialmente en:

**http://www.leonardo2002.de/ehome/egeheim/egeheim.html**

Por cierto, ¿se han fijado que en esta construcción no se echa mano de la razón áurea para nada?

¿de verdad no es tentador suponer que Leonardo halló esta **circulatura**?

**Variaciones sobre el mismo tema**

Que el círculo que venimos llamando "oculto" representa una "cuadratura" o si lo prefieren una "circulatura" es algo en lo que están de acuerdo tanto C.Calvimontes como Schröer & Irle, autores de la ya citada y sugestiva página:

**http://www.leonardo2002.de/ehome/egeheim/egeheim.html**

Por cierto, merece la pena reseñar que esta última presenta una explicación alternativa sobre el dibujo de Leonardo, según la cual el círculo y el cuadrado visibles serían miembros de sendas parejas de círculo y cuadrado asociados de forma iterativa. Mediante tal ingenioso proceso iterativo, concluyen estos autores, se obtendría también una cuadratura aproximada. El grado de aproximación que mencionan es (en su notación) de 1.00037 lo que equivale a unas 370 ppm.

Esta página **no** detalla algunos puntos interesantes, para los que me permito sugerir aquí alguna explicación.

La construcción que proponen se basa en dos círculos pequeños con cuyo auxilio se determinan precisamente los puntos de corte del círculo visible con el lado superior del cuadrado (fig 8):

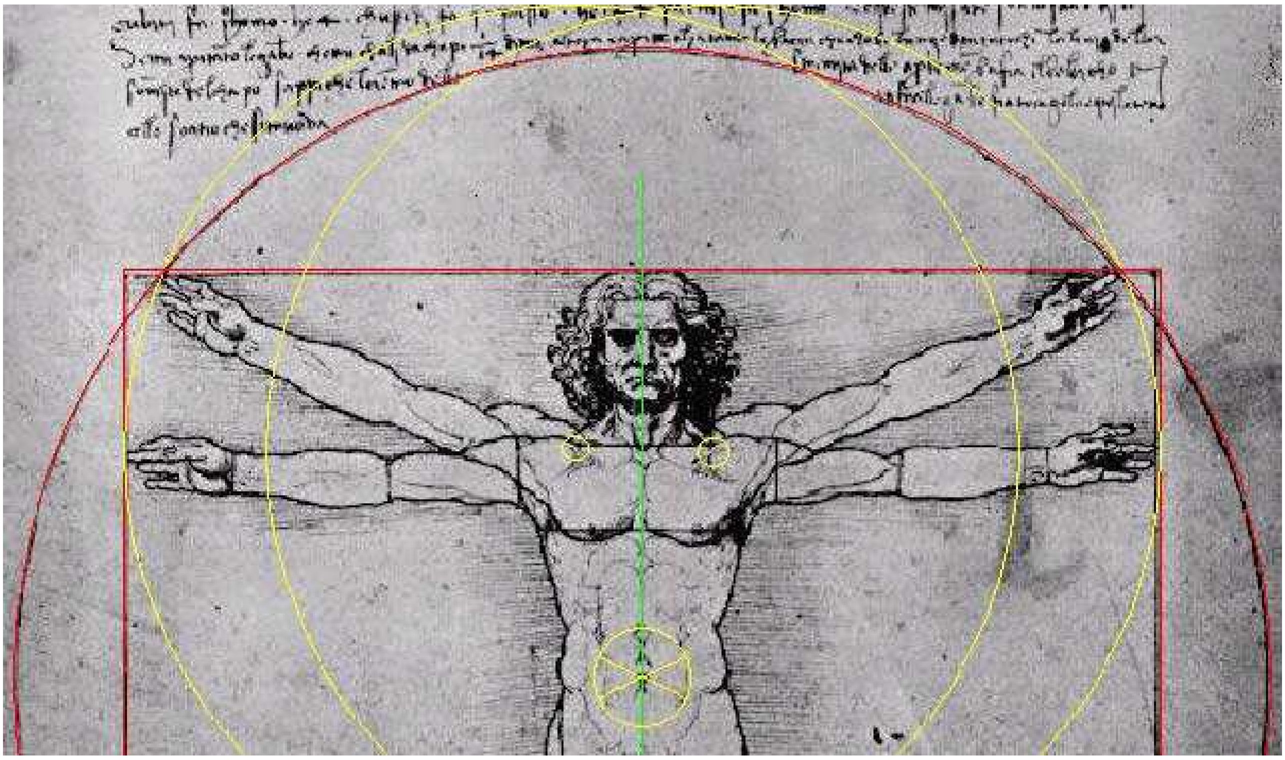


**Fig 8**

Schröer & Irle mencionan que tales círculos tienen sus respectivos centros en sendos puntos que aparecen apenas visibles en el trazo recto de la base del cuello. Pero no indican como obtener por construcción ni el tal trazo recto para el que he ofrecido mas arriba una posibilidad, ni tampoco como halló Leonardo tales centros.

Bien, una vez mas me atrevo a ofrecer una posibilidad.

Retomemos la construcción tal como la dejamos en la figuras 6 y 7 para continuar en la figura 9

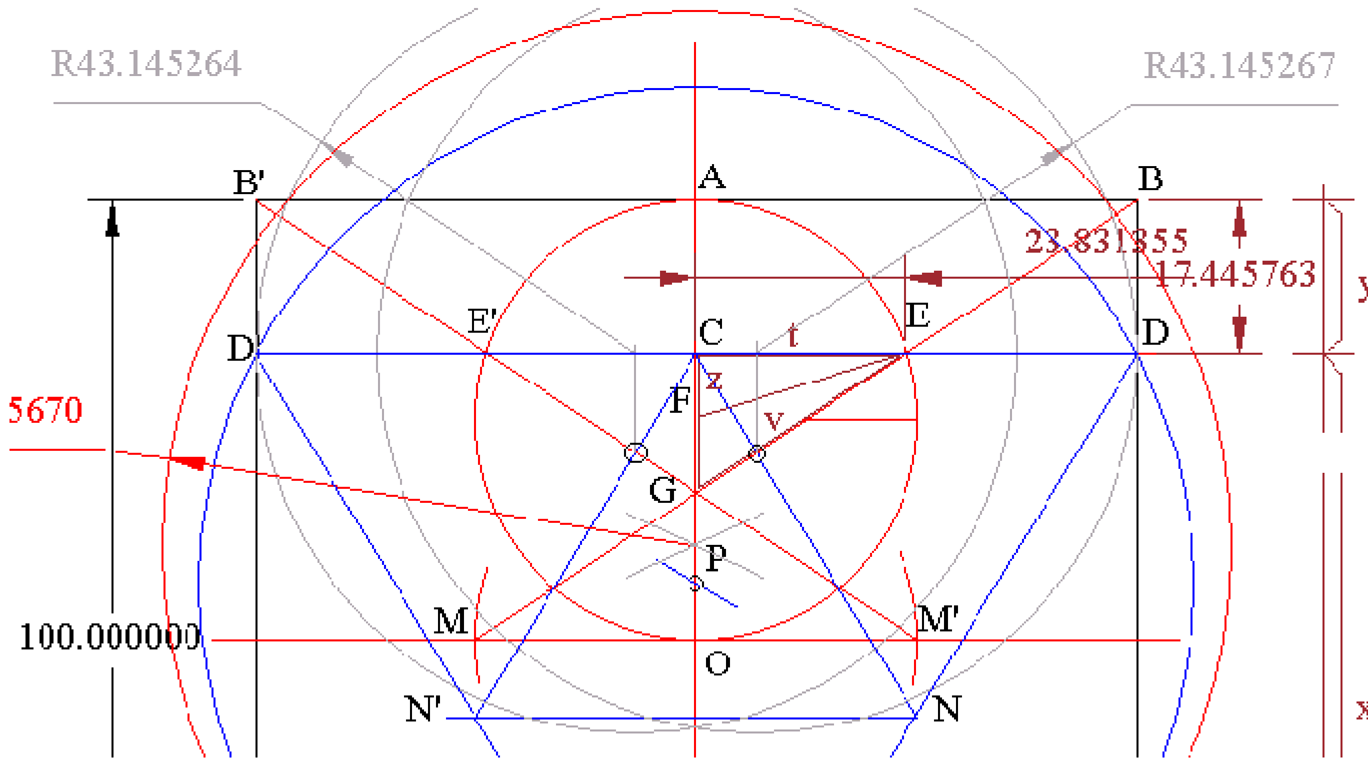



**Fig 9**

1. Completar el triángulo **D'JD** , es decir el formado por los extremos de los brazos y el tercer vértice en los pies.

2. Unir los puntos medios de los tres lados de **D'JD** y obtener así el triángulo pequeño interior **N'CN**.

3. Desde los respectivos cortes de los lados **CN** y **CN'** con los segmentos **B'M'** y **BM** levantar rectas verticales hasta cortar al segmento **D'D** (los "brazos extendidos"). Tales cortes son los dos centros buscados.

4. Trazar los círculos auxiliares con radio desde su centro hasta el lateral correspondiente.

5. Los círculos así trazados cortan al lado superior del cuadrado en los puntos por donde ha de pasar también el **círculo visible**

Sobre el dibujo original :

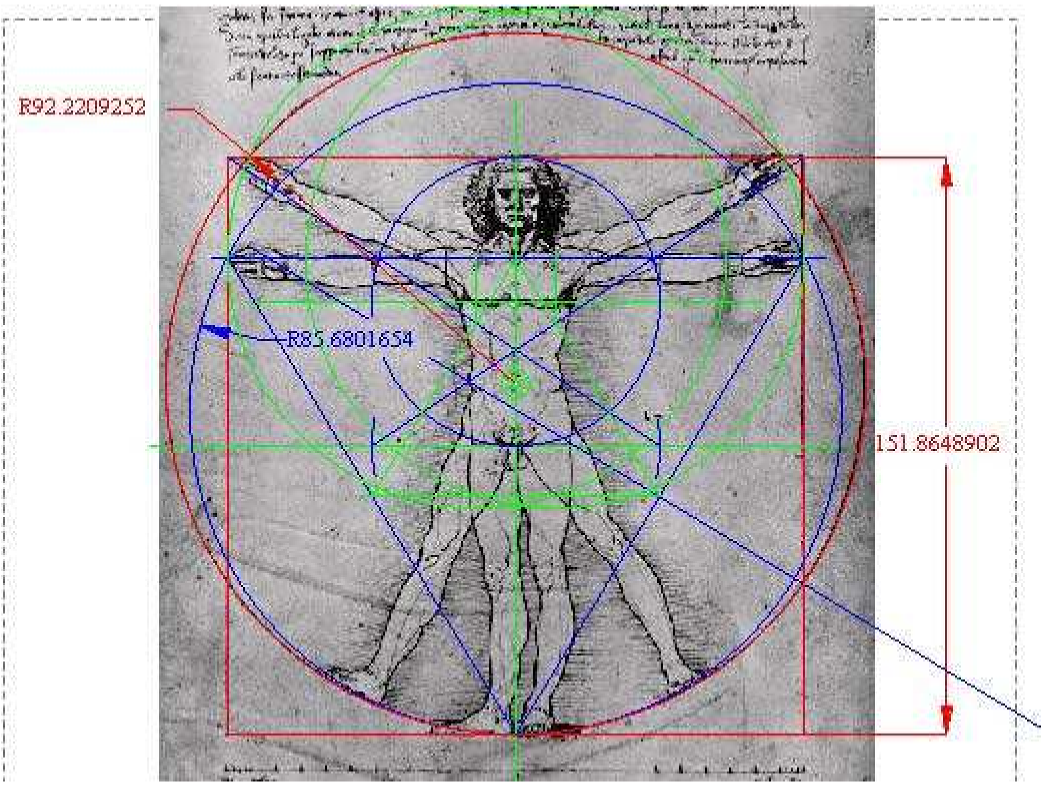



Fig 10

¿Qué diferencia hay entre esta construcción y la propuesta por C. Calvimontes?

No demasiada, la verdad.

Se puede demostrar matemáticamente que mediante esta construcción la razón f , ya definida mas arriba

$$\frac{L}{D/2} = f$$

del lado del cuadrado al radio del círculo visible vale:

1.64675,

mientras que con la construcción indicada por Carlos se obtiene un f de

1.64216,

**es decir ambas construcciones difieren en solo un 0.28%.**

Desde luego es imposible decidir cual de las dos usó Leonardo (si es que las usó) por la simple comparación con las reproducciones disponibles de su dibujo. En ambos casos, p.ej., el centro del círculo visible cae perfectamente sobre el ombligo.

**Conclusiones**

1. El circulo y el cuadrado visibles en el dibujo de Leonardo **no están** casi con seguridad **relacionados exactamente por el número áureo**. Tal relación aparece solo aproximada, coincidencia de la que Leonardo probablemente se percató y que dejó mas o menos visible, tal vez con el propósito de ocultar un significado sin duda mas profundo e importante para él.

2. Es mas que probable que el hombre de Vitruvio esté de hecho señalando el círculo oculto, aquel cuya área es igual a la del cuadrado visible.

3. El círculo visible señala también al círculo oculto (por su intersección con el cuadrado o construcciones alternativas) y de paso, al tener su centro en el ombligo, permite que el dibujo siga el canon de Vitruvio y por su aproximación a la razón áurea, permite también incluirlo en la corriente renacentista que dio a la divina proporción su rango de canon de la belleza.

Nota final:
Este trabajo no habría sido posible sin el de Carlos Calvimontes. Quiero expresar aquí mi admiración y respeto por su trabajo. El que yo discrepe con él en cuanto a lo que él denomina "del cuadrado al círculo" no merma un ápice el valor de su trabajo.

Y por cierto es el turno de los historiadores... espero que Vds le den continuación a todo esto...

**Carlos M Piera.**

**Madrid 21 Marzo, 2002**